SÉRIE : A
N° D'ORDRE : 164
N° DE SÉRIE : 18

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le Titre de Docteur Es-Sciences Mathématiques

par

Georges TOURNEMINE

Étude asymptotique et numérique de problèmes posés par l'aérodynamique transsonique.

Soutenue le 30 novembre 1972 devant la Commission d'Examen

M. A. MIGNOT — Président

M. D. EUVRARD
M. P. GERMAIN
M. J. C. NEDELEC — Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552708_0005

SÉRIE : A
N° D'ORDRE : 164
N° DE SÉRIE : 18

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le Titre de Docteur Es-Sciences Mathématiques

par

Georges TOURNEMINE

Étude asymptotique et numérique de problèmes posés par l'aérodynamique transsonique.

Soutenue le 30 novembre 1972 devant la Commission d'Examen

M. A. MIGNOT	Président
M. D. EUVRARD	Examinateurs
M. P. GERMAIN	
M. J. C. NEDELEC	

UNIV.
LEIDEN.
BIBL.

UNIVERSITE DE RENNES

U.E.R. issues de la FACULTE DES SCIENCES

Doyens Honoraires

M. MILON Y.
M. TREHIN R.
M. SCHMITT M.
M. LE MOAL H.
M. MARTIN Y.
M. BOCLE J.

Professeurs Honoraires

M. FREYMANN R.
M. HAGENE P.
M. POISSON R.
M. ROHMER R.
M. TREHIN R.
M. SALMON-LEGAGNEUR F.
M. des ABBAYES H.
M. MILON Y.

Maîtres de Conférences Honoraires

M. GRILLET L.
M. LECRECQ A.

Mathématiques

Professeurs

Melle CHARPENTIER M.
M. GUERINDON J.
M. METIVIER M.
M. GIORGIUTTI I.
M. BRUNEL A.
M. TOUGERON J. C.
M. MIGNOT A.

Maîtres de Conférences & Chargés de Cours

M. LEGOUPIL J.
M. HOUDEBINE J.
M. EUVRARD D.
M. NEDELEC J. C.
M. VERJUS J. P.
M. TRILLING L.
M. FERRAND D.
M. GUIVARC'H Y.
M. KEANE M. (M. C. associé)
M. GILDELAMADRID (Prof. associé)

Physique

M. VACHER M.
M. VIGNERON L.
M. LE BOT J.
Mme ROBIN née SALOMOND
M. ROBIN S.
M. LE MONTAGNER S.
M. MEVEL J. Y.
M. MEINNEL J.
M. REGENSTREIF E.
M. BRUN P.
M. LE ROUX E.
M. DUBOST
M. GUIDINI
M. HAEUSLER C.
M. ARQUES P. Y.
M. DECAMPS E.
M. NUSIMOVICI M. A.

Chimie

M. VENE J.
M. LE MOAL H.
M. LEVAS E.
M. PELTIER D.
M. PRIGENT J.
M. JOUAN P.
M. FOUCAUD A.
M. LANG J.
M. CARRIE R.
M. GUERILLOT C.
M. KERFANTO M.
M. DABARD R.

M. GRANDJEAN D.
M. LUCAS J.
M. DUVAL J.
M. MARTIN G.

Zoologie

M. RICHARD G.
M. MAILLET P.
M. BOISTEL J.
M. RAZET P.
M. FOLLIOT R.
M. ALLEGRET P.
M. MANIEY J.
M. JOLY J.
M. POSTEL (Professeur associé)

M. LEFEUVRE J.C.

Botanique

M. VILLERET S.
M. CLAUSTRES G.
Melle GOAS M.
Melle GOAS G.

Mme LEMOINE C.
M. TOUFFET

Géologie

M. COGNE J.
Melle DURAND S.
M. PHILIPPOT A.

M. BOILLOT G.
M. HAMEURT J.

Le Secrétaire Général de l'Université

M. BOURDIGUEL R.

A MA FEMME

A MES PARENTS

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur D. EUVRARD qui a dirigé cette thèse. Je lui dois ses conseils, ses suggestions et ses encouragements durant tout le temps de mes recherches. Je lui demande de bien vouloir trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance et aussi, s'il le permet, l'assurance de ma très sincère amitié.

Je désire exprimer ma gratitude à Monsieur le Professeur P. GERMAIN, Membre de l'Académie des Sciences, pour ses précieux conseils et pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à mon travail.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à mes camarades J. HUBERT et F. RIGAUT pour l'aide qu'ils m'ont apportée au début de mes recherches numériques.

Mes remerciements vont également à Messieurs G. GONTIER, A. DYMENT et P. GRYSON pour la qualité de leurs résultats expérimentaux et leur amicale collaboration.

Je remercie Monsieur le Professeur A. MIGNOT pour l'intéressant second sujet qu'il m'a proposé et Monsieur le Professeur J.C. NEDELEC d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Enfin, il m'est agréable de remercier Mademoiselle M.F. CHERIAUX pour la qualité de la frappe du manuscrit.

INTRODUCTION

Les problèmes posés par l'aérodynamique transsonique sont déjà anciens. Il y a 27 ans, alors que s'achevait la seconde guerre mondiale, les armées aériennes étaient équipées d'avions à hélice dont les moteurs à pistons s'essouflaient à 8 000 mètres d'altitude, pour des vitesses de 750 km/h. Cependant, les avions à hélice s'approchaient déjà de la vitesse du son en piqué, et leur comportement aérodynamique étrange, inattendu rendait le pilotage fort difficile, voire impossible : inversion des commandes, vibration des gouvernes et même de tout l'avion, instabilité... ; ce fut l'époque du "mur du son". Avec la venue des avions à réaction, beaucoup plus rapides que les avions à hélice, ces effets transsoniques apparurent en vol normal. Il devint nécessaire d'entreprendre des études expérimentales et théoriques pour comprendre ce phénomène et y remédier. Les expérimentateurs se heurtèrent à d'énormes difficultés en particulier au phénomène de "blocage" dans les souffleries, et les théoriciens se trouvèrent en présence d'une équation mixte non linéaire à résoudre.

Vers les années 60, il y eut un reflux général des chercheurs vers d'autres domaines d'étude. C'est que l'augmentation de la poussée des propulseurs permettait de passer rapidement la zone dangereuse. A vrai dire, aucun des problèmes fondamentaux n'était résolu. Mais, du point de vue pratique, on savait atteindre sans encombre les vitesses supersoniques et c'était l'essentiel.

Depuis, un nouvel intérêt s'est porté sur les problèmes transsoniques, sous une forme certes moins spectaculaire, mais plus profonde.

D'abord, pour calculer l'écoulement dans la partie divergente des tuyères supersoniques, on a eu besoin de données initiales précises dans la

région transsonique du col. Ensuite, il y a eu l'important problème du choc détaché en amont d'un corps émoussé hypersonique, problème essentiellement de type mixte, et qui conditionne la rentrée des missiles et des satellites dans l'atmosphère.

Notons aussi que les pales d'hélicoptères et de turbines ont leurs extrêmités en plein régime transsonique. La connaissance de la conduite de l'écoulement supercritique qui s'établit, s'avère nécessaire pour améliorer leurs performances.

Enfin, des programmes d'avions gros porteurs légèrement subsoniques, du type "Airbus", sont venus remettre à jour l'énorme problème, toujours non résolu, des zones locales supersoniques situées dans des écoulements subsoniques, et terminées par des chocs. Il ne s'agit plus seulement de faire voler des avions à M = 0.9, par exemple, mais de les faire voler économiquement, car ces avions sont destinés à vulgariser le transport aérien de masse.

Pour se convaincre du vif intérêt suscité par ce problème, sans pour autant se perdre dans la bibliographie, il suffit de consulter

- la conférence de P. GERMAIN [18] , prononcée au Congrès Canadien de Mécanique Appliquée en mai 1967, sur "l'Actualité des problèmes transsoniques" ;
- les comptes-rendus du symposium transsonique qui s'est tenu sous les auspices de l'A.G.A.R.D. [1] en septembre 1968 à Paris ;
- "Twenty years of transonic flow" de J.D. COLE [7], lecture présentée à AIAA à San Francisco en juin 1969.

Entre le problème du choc détaché et le problème de la zone locale supersonique, le problème de l'écoulement sonique à l'infini occupe une place originale et intéressante. Certes, les avions ne volent pas, en croisière, au Mach d'approche $M_\infty = 1$. Cependant, la distribution des vitesses sur un profil

à $M_\infty = 1$ représente, en quelque sorte, l'enveloppe supérieure des distributions pour une certaine plage de M_∞ inférieurs à l'unité. C'est la propriété bien connue du "gel transsonique", dont les expérimentateurs anglais du N.P.L. ont tiré partie en énonçant, dès les années 50, une règle empirique très simple permettant de calculer la distribution des vitesses sur un profil subsonique mais supercritique, lorsque l'on connaît la distribution des vitesses sur le même profil à $M_\infty = 1$. Ceci motive en quelque sorte l'effort consacré par les chercheurs, depuis plus d'une vingtaine d'années, pour prédire l'écoulement d'un fluide non dissipatif s'établissant autour d'un obstacle qui se déplace à la vitesse du son. Depuis l'article fondamental de F. I. FRANKL' [14] en 1947, (voir également [26]), de nombreux travaux ont eu pour objet l'étude du comportement asymptotique du fluide à l'infini. Le terme dominant du potentiel de perturbation est une solution homogène tant pour les profils (FRANKL' [14], K.G. GUDERLEY [20]) que pour les corps de révolution (S.V. FAL'KOVITCH, I.A. CHERNOV [13], et E.A. MULLER, K. MATSCHAT [30], ainsi que D. RANDALL). En [17], P. GERMAIN présente d'ailleurs une étude systématique des solutions homogènes de l'équation régissant le potentiel des vitesses de perturbation.

La solution homogène étant connue et vérifiée expérimentalement à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, par VAN QUY [54], une étude plus fine du point singulier à l'infini s'est avérée nécessaire. A ce sujet il faut citer les travaux très complets de D. EUVRARD [10], [11], [12]. Partant de la solution homogène, D. EUVRARD a explicité pour un profil plan quelconque les premiers termes du champ asymptotique des vitesses, en amont et en aval des chocs. Il est certainement le premier à avoir utilisé la théorie des développements raccordés pour analyser et étudier le sillage tourbillonnaire crée par la présence des ondes de choc issues de la queue du profil. Enfin, on trouvera [12] l'étude du cas tridimensionnel en amont de la surface de choc.

Utilisant les mêmes méthodes, J. HUBERT [23] a étudié l'écoulement sonique à grande distance d'un obstacle semi-infini présentant une dénivellation, et G. TOURNEMINE [39] l'écoulement asymptotique s'établissant en aval de l'onde de choc issue d'un corps de révolution.

L'apparition de l'ordinateur et son développement prodigieux ont permis de poser les mêmes problèmes transsoniques, mais cette fois sous l'angle numérique. Les méthodes actuellement utilisées pour les calculs numériques en transsonique peuvent être assez facilement classées de la façon suivante:

① Les méthodes "approchées" . Des approximations importantes dictées par l'expérience y interviennent. Elles ont été mises au point pour répondre aux besoins immédiats des constructeurs. Entrent dans ce cadre

. La méthode intégrale OSWATITSCH [33] , ZIEREP [56].

. La méthode des relations intégrales. Elle a été appliquée aux écoulements subsonique et sonique par P.I. CHUSHKIN [6] et plus récemment par M. HOLT et MASSON au subsonique élevé et par MELNIK, IVES au supercritique.

. La linéarisation locale : HOSAKOWA [22].

. La règle de SINNOTT et OSBORNE, du N.P.L.. Elle donne une construction graphique simple de la distribution des vitesses sur le profil pour un mach d'approche supérieur au mach critique et inférieur à 1 quand la distribution des vitesses est connue à $M_\infty = 1$ et $M_\infty = M_{cr}$. Elle confirme l'intérêt particulier du problème à $M_\infty = 1$.

② La méthode hodographique.

Cette méthode est ancienne puisqu'elle remonte à CHAPLYGIN. Pour les problèmes plans avec zone locale supersonique sans choc, les équations restent mixtes mais deviennent linéaires en variables hodographiques, c'est l'intérêt essentiel de cette méthode.

Différents procédés astucieux existent pour résoudre dans l'hodographe, le retour au plan physique ne posant pas de problème a priori

. Solutions exactes pour des fluides fictifs réalistes : TOMOTIKA - TAMADA [37] , FENAIN [15].

. Calcul analogique F. RIGAUT [35].

. Relaxation mixte linéaire : M. FENAIN et C. REYBACH [16].

. Solutions exactes par séries entières convergentes et prolongements analytiques avec calcul numérique, NIEUWLAND [32].

. Signalons encore la construction numérique de solutions qu'on peut considérer comme exactes, réalisée par G. KORN à l'aide d'un développement récent de la méthode de Garabedian.

③ La méthode instationnaire.

Elle transforme un problème aux limites mixte, elliptique-hyperbolique, à deux variables, en un problème hyperbolique bien posé à trois variables, avec conditions initiales et conditions aux limites. Cette méthode a été utilisée, en particulier, par CARRIERE et CAPELIER [5] ; MAGNUS et YOSHIHARA [27] ; MORETTI et GROSSMAN [29]. Malheureusement, elle ne s'applique pas aux écoulements à $M_\infty = 1$; de plus, elle exige une grande capacité de mémoires et surtout de longs temps de calculs.

④ La relaxation mixte non linéaire, dans le plan physique.

Cette méthode due à MURMAN et COLE [31] consiste, grosso-modo, à utiliser un schéma de discrétisation différent selon que le point se trouve en elliptique, sur la ligne de changement de type ou en hyperbolique. Cette méthode, tout à fait récente, apparaît comme étant très prometteuse.

Enfin signalons une méthode originale et très intéressante due à S.B. BERNDT et Y. SEDIN [2]. C'est une méthode itérative construite pour les écoulements soniques de révolution, dans le cadre des corps élancés.

Il apparaît très clairement que le nombre de méthodes vraiment différentes permettant de résoudre les équations complètes dans le plan physique est assez faible. De plus, si l'on s'intéresse à $M_\infty = 1$ il ne reste plus, jusqu'à présent, que la méthode de relaxation mixte non linéaire laquelle n'a été appliquée jusqu'à présent qu'à la zone locale supersonique. Il semblait donc intéressant d'élaborer une méthode numérique adaptée aux écoulements à $M_\infty = 1$, et permettant de traiter dans le plan plysique les équations complètes.

Nous réunissons ici, en vue d'une thèse de Doctorat es Sciences, un ensemble de résultats concernant les écoulements à $M_\infty = 1$. Ces résultats ont fait l'objet de 1968 à 1972 d'une série de publications aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences [40], [42], [45], [47], [50], au Journal de Mécanique [46], [52] et ont été exposés à l'occasion de communications dans différents Congrès [41], [43], [44], [48], [49] et [51].

Notre travail se divise en deux parties distinctes.

I - Une étude théorique destinée à élucider la nature des singularités qui apparaissent en aval de l'onde de choc d'un corps tridimensionnel quelconque se déplaçant à la vitesse du son dans un fluide compressible dénué d'effets dissipatifs.

II - L'élaboration d'une méthode numérique pour la résolution de certains problèmes mixtes non linéaires, avec application au calcul de l'écoulement sonique autour d'un profil d'aile donnée.

Le travail présenté en II fait partie d'une recherche menée, avec la collaboration de D. EUVRARD, sur contrat D.R.M.E.

PREMIERE PARTIE

ECOULEMENTS STATIONNAIRES AUTOUR D'OBSTACLES TRIDIMENSIONNELS EN REGIME SONIQUE

1. Introduction.

Ce travail termine une série d'articles présentés au Journal de Mécanique depuis 1967 respectivement par D. EUVRARD [10], [11], [12], J. HUBERT [23] et G. TOURNEMINE [39], sur les écoulements transsoniques de fluides parfaits. Il a été publié lui aussi au Journal de Mécanique [46].

Dans cette présente étude nous nous proposons d'étendre, aux corps tridimensionnels, les résultats acquis sur les écoulements de révolution en aval de l'onde de choc, pour des fluides parfaits. Nous montrons d'abord que les schémas jusque là utilisés pour les écoulements plans ou de révolution, autour d'obstacles de dimensions finies ou non, sont inadéquats pour représenter les écoulements tridimensionnels quelconques. Cette incompatibilité due au schéma de fluide parfait n'existe pas en fluide dissipatif comme ont pu le montrer O.S. RYZHOV et E.D. TERENTEV [36]. Une critique des hypothèses formulées dans le schéma de révolution, nous conduit à déterminer le comportement du tourbillon à l'infini aval pour des grandes valeurs de la coordonnée radiale. L'introduction d'hypothèses dictées d'une part par le schéma mathématique et d'autre part par la physique du problème nous permet de définir une classe d'écoulements

pour laquelle le schéma, type révolution, reste valable. Cette classe d'écoulements, correspondant à des corps tridimensionnels à portance nulle, généralise les écoulements de révolution ; nous les avons appelés écoulements de pseudo-révolution. Ces écoulements étant tridimensionnels, le champ des vitesses dépend des trois coordonnées d'espace. Aussi, contrairement au cas de révolution, nous avons à résoudre à chaque étape, non plus un système différentiel ordinaire, mais un système de trois équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites. Néanmoins, nous avons réussi à déterminer explicitement les trois premiers termes du développement asymptotique du champ des vitesses.

La dernière partie de cette étude est consacrée aux écoulements tridimensionnels faiblement portants. Pour cela, nous étudions les petites perturbations tridimensionnelles d'un écoulement de pseudo-révolution. Nous montrons l'existence d'une perturbation singulière, à l'infini aval, vis à vis d'un petit paramètre ε lié à la portance. Nous introduisons alors un développement distal et un développement proximal relatifs à ε ainsi que la définition de différents processus de passage à la limite inspirés d'une part du problème de la couche-limite et d'autre part de ceux formulés pour le sillage tourbillonnaire [38]. Par raccordement, l'épaisseur de la région distale, les indices de puissances intervenant dans le développement proximal, le premier ordre du champ des vitesses ainsi que le comportement des fonctions sont déterminés. L'application de la conservation de la quantité de mouvement transversale montre que la portance est d'ordre ε. Ce dernier résultat apparaît être cohérent avec la théorie des corps élancés en incidence développée en transsonique par A. MESSITER [28]. Bien entendu, nous prouvons que l'incompatibilité démontrée pour les corps tridimensionnels quelconques est levée pour les écoulements faiblement portants que nous venons de mettre en évidence. Ainsi, ce schéma basé sur les perturbations d'un écoulement de pseudo-révolution est cohérent avec lui-même et permet

de déterminer au premier ordre le champ des vitesses à grande distance de l'obstacle. On peut enfin remarquer que, si l'on se place hors de la perturbation singulière due à ε, le développement distal $\vec{q}_D$ se présente comme étant composé de deux développements semblables à ceux définis pour les écoulements tridimensionnels quelconques.

2. Résultats essentiels concernant les écoulements de révolution [39].

Un corps de révolution est plongé dans un écoulement de fluide non dissipatif, un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes. L'écoulement à l'infini amont est parallèle à l'axe de révolution pris pour axe des x, sa vitesse est sonique et prise égale à l'unité. Un point P quelconque est repéré par sa coordonnée longitudinale x et sa coordonnée radiale y.

La partie principale $\tilde{\varphi}^p$ du potentiel de perturbation φ^p, vérifie l'équation

$$(1) \qquad -(\gamma+1)\ \tilde{\varphi}^p_x\ \tilde{\varphi}^p_{xx} + \tilde{\varphi}^p_{yy} + y^{-1}\ \tilde{\varphi}^p_y = 0$$

γ étant l'indice adiabatique du gaz. Cette équation admet des solutions "homogènes" du type

$$(2) \qquad \tilde{\varphi}^p = y^{3n-2}\ f(\zeta) \quad , \qquad \zeta = (\gamma+1)^{-1/3}\ x\ y^{-n} \quad (0 < n < 1)$$

S.V. FAL'KOVITCH et I.A. CHERNOV [13] ; E.A. MULLER et K. MATSCHAT [30] ont montré que l'exposant n convenant au problème doit être égal à $\frac{4}{7}$ et ont obtenu simultanément des paramétrages explicites de la solution homogène. Une étude systématique sur les écoulements transsoniques homogènes a été faite par P. GERMAIN en [17] .

A l'ordre de la solution homogène, toutes les surfaces remarquables : la surface sonique ; la caractéristique-limite ; l'onde de choc etc... ont pour équation ζ = Cte. L'unité de longueur sera choisie pour que la valeur de cette constante soit égale à 1 sur la surface caractéristique-limite.

Rassemblons sous forme de tableau les principaux résultats concernant la solution homogène.

TABLEAU I

Le paramètre t varie de 0 sur le demi-axe des x négatifs à t^- sur la face amont du choc, puis de t^+ sur la face aval à 0 sur le demi-axe des x positifs. Supposant que le premier terme d'un développement asymptotique de φ^p, à grande distance de l'obstacle et en amont de l'onde de choc, est une solution homogène, D. EUVRARD [12] a déterminé les termes suivants.

En aval du choc, on écrit tout d'abord un développement extérieur du champ des vitesses pour ζ fixé et y tendant vers l'infini. Ses premiers termes dérivent de potentiels et certains d'entre eux s'interprètent, à l'aide de lois de conservation, en fonction de la traînée de l'obstacle. Dans le sillage on introduit un nouveau développement dit intérieur, pour y fixé fini, et x tendant vers l'infini, dont le trait dominant est la rotationnalité. Le raccordement de ces deux développements s'effectue selon la méthode classique de Kaplun-Lagerström. Les trois premiers termes des développements extérieurs et intérieurs sont calculés explicitement et un théorème d'unicité prouve que ce sont les seuls possible.

Si Ω est le tourbillon, on montre que $\Omega = O\left(y^{-\frac{25}{7}}\right)$ et nous trouvons, pour le potentiel des vitesses, le développement extérieur

$$(3)\quad \varphi = x + \varphi^p = x + y^{-\frac{2}{7}} f_o(\zeta) + y^{-\frac{4}{7}} f_1(\zeta) + y^{-\frac{6}{7}} f_2(\zeta) + O(y^{-\frac{8}{7}}) ;$$

$$\zeta = (\gamma+1)^{-\frac{1}{3}} \times y^{-4/7}$$

Tandis que, pour les développements intérieurs des composantes u et v de la vitesse nous obtenons

$$(4)\qquad \begin{cases} u = U(y) + x^{-3/2}\,\bar{f}_o(y) + x^{-2}\,\bar{f}_1(y) + x^{-5/2}\,\bar{f}_2(y) + O(x^{-3}) \\ \\ v = \qquad x^{-5/2}\,\bar{g}_o(y) + x^{-3}\,\bar{g}_1(y) + x^{-7/2}\,\bar{g}_2(y) + O(x^{-4}) \end{cases}$$

U(y) étant une fonction arbitraire, liée au saut d'entropie à travers le choc, et représentant en quelque sorte l'image du choc à l'infini aval.

3. Etude de l'écoulement autour d'un corps tridimensionnel quelconque.

Dans toute la suite de ce travail nous considérerons un corps tridimensionnel de dimensions finies, plongé dans un écoulement uniforme et sonique. Le fluide est parfait et à chaleurs spécifiques constantes. Un point arbitraire P de l'écoulement est repéré par sès coordonnées cylindriques (x, y, θ) ; x représente une coordonnée longitudinale, y une coordonnée radiale et θ un angle mesuré positivement autour de l'axe des x parallèle à l'écoulement non perturbé, à partir d'un repère fixe (x_o, y_o, z_o) (fig. 1). La vitesse critique est prise égale à l'unité.

Figure 1

Les notations utilisées seront les mêmes que dans les articles [12] et [39].

L'écoulement, en amont du choc, est fixé et d'après les travaux de D. EUVRARD [12] connu uniformément à grande distance de l'obstacle par son potentiel des vitesses.

$$(5)\quad \varphi = x + y^{-2/7}\,f(\zeta) + y^{-6/7}\,f^{(2)}(\zeta) + y^{-1}\,f^{(3)}(\zeta)\cos\theta + \ldots \;;\; f^{(3)} = \bar{C}_{10}\,t \;;\; \bar{C}_{10} = \text{Cte}$$

la fonction f étant la solution homogène en amont du choc et $f^{(2)}$ une fonction calculée explicitement à l'aide du paramètre t.

En aval du choc il est naturel d'admettre qu'il faille au moins les termes en $y^{-2/7}$, $y^{-6/7}$, $y^{-1}\cos\theta$ car ils existent déjà en amont ainsi que le terme en $y^{-4/7}$ car il existe déjà dans les écoulements de révolution en aval du choc (3).

Aussi poserons-nous, que le développement extérieur du potentiel des vitesses en aval de l'onde de choc aura la représentation

$$(6)\quad \varphi = x + y^{-\frac{2}{7}} f_o(\zeta) + y^{-\frac{4}{7}} f_1(\zeta) + y^{-\frac{6}{7}} f_2(\zeta) + y^{-1} f_3(\zeta)\cos\theta + O(y^{-\frac{8}{7}})$$

dans laquelle f_o, f_1 et f_2 sont les fonctions intervenant dans le développement extérieur (3). Il est utile de remarquer que pour terme dominant du potentiel de perturbation nous avons choisi la solution homogène f_o. Donc, au premier ordre au moins, l'écoulement est de révolution. Ceci nous assure que loin du corps c'est l'aire de la section qui intervient et non sa forme, ce qui revient en quelque sorte à admettre la loi des aires transsoniques.

La substitution de (6) dans l'équation du potentiel nous permet de calculer f_3. Si l'on considère un terme potentiel de la forme $y^p f(\zeta)\cos(N.\theta)$, l'équation du potentiel, en tenant compte du paramétrage de ζ rappelé dans le tableau I, montre que f satisfait l'équation

$$(7)\quad -20(t+1)\,t^2\frac{d^2f}{dt^2} + 4(p+1)(12t+5)\,t\frac{df}{dt} - 5(p^2-N^2)(1-6t)\,f = 0$$

Or, p = -1 et N = 1 pour f_3, l'équation (7) nous donne :

$$(8)\quad f_3 = C_3^R\,t + C_3^I \quad ; \quad C_3^R = \text{Cte} \quad ; \quad C_3^I = \text{Cte}.$$

Finalement, le développement extérieur du potentiel s'exprime sous la forme

$$(9)\quad \varphi = x + y^{-\frac{2}{7}} f_o(\zeta) + y^{-\frac{4}{7}} f_1(\zeta) + y^{-\frac{6}{7}} f_2(\zeta) + y^{-1} (C_3^R t + C_3^I) \cos\theta + \ldots$$

en explicitant le premier terme vraiment tridimensionnel.

3.1. Etude de la surface de choc dans la région extérieure.

Dans la région extérieure nous cherchons la surface de choc sous la forme

$$(10)\quad \zeta = \zeta_c \left[1+\lambda_1 y^{-\frac{2}{7}} + \lambda_2 y^{-\frac{4}{7}} + \lambda_3 y^{-\frac{5}{7}} \cos\theta\right] + O(y^{-\frac{6}{7}}) \; ; \; \zeta_c = 2.3^{\frac{1}{7}} (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{7}}$$

où λ_1 et λ_2 sont les constantes intervenant dans le cas de révolution et λ_3 une nouvelle constante, inconnue, représentant le premier terme tridimensionnel du choc.

Nous venons donc d'introduire par l'intermédiaire du potentiel des vitesses et de l'équation du choc trois constantes C_3^R, C_3^I et λ_3. Ces trois constantes ne sont pas indépendantes. En effet, nous devons assurer à l'ordre considéré la continuité du potentiel à travers le choc et satisfaire l'équation de Prandtl.

Continuité du potentiel.

Un développement de Taylor permet d'écrire, au voisinage de l'onde de choc

$$(11)\quad f_i(\zeta) = f_i(\zeta_c) + \lambda_1 \zeta_c f_i'(\zeta_c) y^{-\frac{2}{7}} + \zeta_c \left[\lambda_2 f_i'(\zeta_c) + \frac{\lambda_1^2}{2} \zeta_c f_i''(\zeta_c)\right] y^{-\frac{4}{7}} + \zeta_c \lambda_3 y^{-\frac{5}{7}} f_i'(\zeta_c) \cos\theta + O(y^{-\frac{6}{7}}) \qquad i = (0,1,2,3)$$

où les ' désignent des dérivées par rapport à ζ.

La continuité du potentiel à travers le choc réel à l'ordre considéré conduit aux relations

$$(12)\quad \begin{cases} f_o(\zeta_c) = f(\zeta_c) \quad , \lambda_1\, \zeta_c\left[f_o'(\zeta_c) - f'(\zeta_c)\right] + f_1(\zeta_c) = 0 \\ \lambda_2\, \zeta_c\left[f_o'(\zeta_c) - f'(\zeta_c)\right] + \lambda_1\, \zeta_c\, f_1'(\zeta_c) + \left[f_2(\zeta_c) - f^{(2)}(\zeta_c)\right] + \\ \qquad + \frac{\lambda_1^2}{2}\, \zeta_c^2\, \left[f_o''(\zeta_c) - f''(\zeta_c)\right] = 0 \end{cases}$$

$$(13)\quad \lambda_3\, \zeta_c\, \left[f_o'(\zeta_c) - f'(\zeta_c)\right] + f_3(\zeta_c) - \bar{f}(\zeta_c) = 0 \qquad , \quad \bar{f} = t\, \bar{C}_{10}$$

les égalités (12) sont bien, comme nous nous y attendions, les mêmes relations que celles obtenues dans les écoulements de révolution tandis que l'équation (13) relie les trois nouvelles constantes λ_3, C_3^R et C_3^I linéairement.

Equation de Prandtl.

Représentant la vitesse tangentielle par q_t et les vitesses normales amont et aval respectivement par $(q_n)_1$ et $(q_n)_2$, la relation de Prandtl

$$(14)\quad (q_n)_1\ (q_n)_2 = 1 - \mu^2\, q_t^2 \quad , \qquad \mu^2 = (\gamma-1)\,(\gamma+1)^{-1}$$

donne après quelques calculs, pour le premier terme purement tridimensionnel, la relation

$$(15)\quad f_3'(\zeta_c) + \bar{f}'(\zeta_c) = -\,80.7^{-2}\ .\ \zeta_c^2\, \lambda_3$$

qui est aussi linéaire en λ_3, C_3^R et C_3^I .

Ainsi, les nouvelles constantes λ_3, C_3^R et C_3^I doivent satisfaire le système linéaire.

$$(16)\qquad \begin{cases} 7^2.2^{-1}.5^{-1}\, a_2^{-\frac{3}{7}}\,(6t_+-1)^{-1}\,t_+^{\frac{9}{7}}\,C_3^R + 80.7^{-2}\zeta_c^2\lambda_3 = -7^2.2^{-1}.5^{-1}(6t_-+1)^{-1}t_-^{\frac{9}{7}}\bar{C}_{10} \\ t_+\,C_3^R + \zeta_c\,[f_o'(\zeta_c) - f'(\zeta_c)]\;\lambda_3 = \bar{C}_{10}\,t_- - C_3^I \end{cases},$$

$$(17)\qquad t_+ = (12)^{-1}\,(7\sqrt{3} - 12)\quad ;\quad t_- = (12)^{-1}\,(12 + 7\sqrt{3})$$

le calcul du déterminant de (16) montre que ce système est de Cramer vis-à-vis des inconnues C_3^R et λ_3. Donc, dès qu'on se donne C_3^I, les deux autres constantes λ_3 et C_3^R sont déterminées.

3.2. Influence du premier terme tridimensionnel du potentiel sur le développement intérieur.

L'application du principe de raccordement au développement extérieur va nous donner les termes nécessaires entrant dans le développement intérieur du champ des vitesses. Les processus de passage à la limite étant les mêmes que pour les écoulements de révolution, les termes $y^{-\frac{2}{7}} f_o$; $y^{-\frac{4}{7}} f_1$ et $y^{-\frac{6}{7}} f_2$ ont bien entendu le même comportement dans la zone de raccord. Il nous faut maintenant étudier l'influence du nouveau terme $y^{-1} f_3 \cos\theta$ sur le développement intérieur. A cet effet nous écrivons

$$(18)\qquad \varphi_3 = \varphi_3^R + \varphi_3^I\ ,\ \varphi_3^R = C_3^R\, t\, y^{-1}\cos\theta\ ;\ \varphi_3^I = C_3^I\, y^{-1}\cos\theta$$

la vitesse $\vec{q}_3$ déduite du potentiel φ_3, donne en limite intérieure

$$(19)\qquad \lim_{\substack{y \text{ fixé} \\ \zeta\to\infty}} \vec{q}_3 = \begin{bmatrix} u_3^R = O(x^{-\frac{9}{2}}\ y^1\ C_3^R) \\ v_3^R = O(x^{-\frac{7}{2}}\ y^o\ C_3^R) \\ w_3^R = O(x^{-\frac{7}{2}}\ y^o\ C_3^R) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_3^I = 0 \\ v_3^I = O(x^o\ y^{-2}\ C_3^I\cos\theta) \\ w_3^I = O(x^o\ y^{-2}\ C_3^I\sin\theta) \end{bmatrix}$$

Il suit de là que la partie régulière φ_3^R de φ_3 laisse inchangés, en ce qui concerne les puissances, les deux premiers termes du développement intérieur que nous avions obtenus pour les écoulements de révolution. En revanche, la partie irrégulière φ_3^I de φ_3, vient perturber la partie principale du développement intérieur du cas de révolution puisque dans la zone de raccord les vitesses afférentes à φ_3^I sont à la puissance zéro. Le terme dominant du développement intérieur pour les écoulements tridimensionnels devra donc être nécessairement de la forme

$$\vec{q} = [u(y,\theta)\, x^\circ \;;\; g(y,\theta)\, x^\circ \;;\; h(y,\theta)\, x^\circ] \tag{20}$$

les fonctions u, g et h étant inconnues. Le raccordement précédent peut être illustré par le schéma représenté par le tableau II.

TABLEAU II

Nous constatons que l'introduction de la partie irrégulière du terme du potentiel purement tridimensionnel, fait remettre en question toute la structure du développement intérieur du cas de révolution. Cette modification profonde de l'écoulement intérieur nous fait pressentir que le terme φ_3^I joue un rôle fondamental dans l'écoulement. Nous allons montrer, en effet, que ce terme est lié à la portance.

3.3. Conservation de la quantité de mouvement transversale.

Figure 2

Nous désignerons par $\vec{n}$ la normale unitaire, extérieure au cylindre droit circulaire, ABCD d'axe x et de rayon y_1 suffisant, pour que le corps soit contenu entièrement à l'intérieur (fig. 2). Dans ces conditions, on

sait que la résistance aérodynamique $\vec{R}$ du profil s'exprime par la relation

$$(21) \qquad \vec{R} = - \oiint_{ABCD} \{\rho\vec{q}\,[(\vec{q}.\vec{n}) + p\,\vec{n}]\}\, dS$$

où p représente la pression, d'où la portance

$$(22) \qquad P = - \oiint_{ABCD} \{\rho\vec{y}_o.\vec{q}\,(\vec{q}.\vec{n}) + p\,\vec{y}_o.\vec{n}\}\, dS$$

Cette intégrale, qui fait intervenir le champ des vitesses, est calculée sur la frontière du cylindre ABCD. Si bien, puisque nous ne connaissons le champ des vitesses qu'à grande distance de l'obstacle, qu'il nous faudra faire tendre, en un sens à préciser, (ABCD) vers l'infini. Afin de profiter de la zone de raccordement, supposée exister, nous ferons simultanément tendre y et $\zeta_1 > \zeta_c$ vers l'infini. Si nous appelons respectivement Σ_1, Σ_2 et Σ_3, la surface latérale, la face amont et la face aval du cylindre; dans un voisinage du point C, Σ_1 et Σ_3 sont dans la zone de raccordement. Il est alors expédient d'écrire le développement extérieur sur la surface latérale et le développement intérieur (20) sur la face aval BC. Dans la région extérieure, le choc étant faible, si τ désigne l'amplitude de la perturbation, le saut d'entropie sera en τ^3. La relation (22) donne après quelques calculs

$$(23) \qquad - P = + \pi\, C_3^I + \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} u(y,\theta)\rho(y,\theta)\, \{g(y,\theta)\cos\theta - h(y,\theta)\sin\theta\} y\, dy\, d\theta$$

ρ étant la masse spécifique. La convergence de l'intégrale quand y tend vers l'infini est assurée car pour g et h nous avons le comportement

$$(24) \qquad g(y,\theta) = - C_3^I\, y^{-2} \cos\theta + O(y^{-p},\theta)\ ;\ h(y,\theta) = - C_3^I\, y^{-2} \sin\theta + O(y^{-q},\theta)\ ;$$

$$p \text{ et } q > 2.$$

La portance est due au premier terme purement tridimensionnel et plus précisément à sa partie irrégulière φ_3^I.

3.4. Calcul du tourbillon sur la face aval du choc dans la zone extérieure.

Nous avons vu que le principe de raccordement appliqué au champ extérieur des vitesses imposait le développement intérieur (20) avec les comportements (24) pour les fonctions g et h. Mais sur la fonction $u(y,\theta)$ nous n'avons aucune information autre que $u(y,\theta)$ tend vers 1 quand y tend vers l'infini c'est-à-dire "grosso modo" que le raccordement a lieu, en première approximation, avec un écoulement uniforme. Nous ne savons pas davantage jusqu'à quel ordre existe un potentiel des vitesses, dans la région extérieure, il s'avère donc nécessaire de calculer pour, ζ du choc fixé et y grand, le tourbillon sur la face aval du choc réel à l'ordre considéré. Nous indicerons par + ou - une fonction prise respectivement sur la face aval ou amont du choc réel à l'ordre considéré. Si s désigne l'entropie et T la température absolue, l'équation de Crocco nous donne

$$(25)\quad (\overrightarrow{rot}\ \vec{q})_+ = \lambda\ \vec{q}_+ - \{T_+(\overrightarrow{grad}\ s)_+ \wedge \vec{q}_+\}\ q_+^2 \quad ; \quad \lambda = Cte$$

la condition nécessaire (26) $\vec{q}.\overrightarrow{grad}\ s = 0$ est satisfaite car l'écoulement est stationnaire.

Nous définissons un système de coordonnées locales en un point de la surface du choc. Les vecteurs unitaires tangents aux lignes coordonnées θ égal constante et y égal constante seront respectivement nommés $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_\theta$, la base sera complétée par un vecteur unitaire $\vec{u}_q$ colinéaire à $\vec{q}$ pris sur le choc. Si nous appelons $\{\vec{e}_{i'}\}$ la base curviligne non orthogonale $(\vec{u}_q, \vec{u}_y, \vec{u}_\theta)$ et par $\{\vec{e}_j\}$ la base orthonormale $(\vec{x},\vec{y},\vec{\theta})$ attachée aux coordonnées cylindriques, nous définissons classiquement la matrice de changement de base (α) par

$$(27)\qquad \vec{e}_{i'} = \alpha_{i'}^{j}\ \vec{e}_j$$

en adoptant la convention de sommation sur l'indice répété. Un calcul facile mais un peu long permet de déterminer α et son inverse α^{-1}.

Calcul du gradient de l'entropie sur la face aval du choc.

Figure 3

Si p et ρ sont respectivement la pression et la masse spécifique nous avons la relation classique

$$(28) \qquad s_+ - s_- = C_v \{\mathrm{Log}(p_+ \cdot p_-^{-1}) - \gamma\, \mathrm{Log}(\rho_+ \rho_-^{-1})\}$$

dans laquelle C_v est la chaleur spécifique du gaz à volume constant. L'entropie amont s_- est une constante.

En utilisant les notations de la figure 3, les relations liant la pression et la masse spécifique en amont et en aval du choc sont représentées par

$$(29) \quad p_+ p_-^{-1} = (\gamma+1)^{-1} \{2\gamma\sigma - (\gamma-1)\} \; ; \; \rho_+ \rho_-^{-1} = (\gamma+1)\sigma \{2 + (\gamma-1)\sigma\}^{-1} .$$

L'application de la relation (27), en tenant compte de l'équation du choc (10), donne après quelques calculs

$$(30)\; s_+ - s_- = \frac{2}{3} C_v \gamma(\gamma-1) \{(f'_- - \tfrac{16}{49}\zeta_c^2)^3 y^{-\frac{18}{7}} + 3(f'_- - \tfrac{16}{49}\zeta_c^2)^2 (f''_- - \tfrac{16}{49}\zeta_c)\lambda_1\zeta_c\, y^{-\frac{2}{7}}$$
$$+ 3(f'_- - \tfrac{16}{49}\zeta_c^2) \big[(\lambda_2 \zeta_c f''_- + \tfrac{\lambda_1^2}{2} f'''_- + (f^{(2)})'_- - \tfrac{4}{49}\lambda_1^2\zeta_c^2)(f'_- - \tfrac{16}{49}\zeta_c^2) +$$
$$+ \lambda_1^2 \zeta_c^2 (f''_- - \tfrac{16}{49}\zeta_c)^2\big] y^{-\frac{22}{7}} + 3(f'_- - \tfrac{16}{49}\zeta_c^2)^2 (\zeta_c \lambda_3 f''_- + (f^{(3)})'_- +$$
$$+ \tfrac{8}{49}\zeta_c^2 \lambda_3) \cos\theta\, y^{-\frac{23}{7}} + O(y^{-\frac{24}{7}})\} .$$

La relation (26) nous informe que $(\overrightarrow{\text{grad}}\ s)_+$ est perpendiculaire à $\vec{q}_+$ au point considéré sur le choc réel Σ. Or nous cherchons, afin d'appliquer (25), les composantes contravariantes $(\overrightarrow{\text{grad}}\ s)_+^i$ sur la base cylindrique $\{\vec{e}_i\}$. Tenant compte du fait que les composantes contravariantes sont aussi les composantes covariantes dans une base orthogonale, nous avons

$$(31)\quad (\overrightarrow{\text{grad}}\ s)_+^i = (\alpha_i^{j'})\ (\overrightarrow{\text{grad}}\ s)_{+,\,j'} \qquad ,\quad j' = 1,2,3.$$

On a vu que la projection de $(\overrightarrow{\text{grad}}\ s)_+$ est nulle sur $\vec{q}_+$ et on peut montrer que les composantes contravariantes de ce vecteur sur $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_\theta$ sont :

$$(32)\quad \overrightarrow{\text{grad}}_\Sigma\ s_+ = \left\{ \begin{array}{l} (\text{grad}\ s_+)^{(y)} = \dfrac{\partial s_+}{\partial \vec{u}_y} = -\dfrac{12}{7} C_v\ \gamma(\gamma-1)(f'_- - \dfrac{16}{49}\zeta_c^2)^3\ y^{-\frac{25}{7}} + O(y^{-\frac{27}{7}}) \\ (\text{grad}\ s_+)^{(\theta)} = \dfrac{\partial s_+}{\partial \vec{u}_\theta} = -2\ C_v\ \gamma(\gamma-1)(f'_- - \dfrac{16}{49}\zeta_c^2)^2\ . \\ .\ [\zeta_c\ \lambda_3\ f''_- + (f^{(3)})'_- + \dfrac{8}{49}\zeta_c^2\ \lambda_3]\ \sin\theta\ y^{-\frac{30}{7}} + O(y^{-\frac{31}{7}}) \end{array} \right\}$$

Le calcul des composantes covariantes de $\overrightarrow{\text{grad}}\ s_+$ sur la base $\{\vec{e}_{i'}\}$ permet grâce à la relation (31) de trouver les composantes contravariantes sur la base $\{\vec{e}_i\}$

$$(33)\quad \overrightarrow{\text{grad}}\ s_+ \left\{ \begin{array}{l} -48.(49)^{-1}\ C_v\ \gamma(\gamma-1)(\gamma+1)^{\frac{1}{3}}\ \zeta_c(f'_- - \dfrac{16}{49}\zeta_c^2)^3\ y^{-\frac{28}{7}} + \ldots \\ -12.7^{-1}\ C_v\ \gamma(\gamma-1).(f'_- - \dfrac{16}{49}\zeta_c^2)^3\ y^{-\frac{25}{7}} + \ldots \\ -48\ (49)^{-1}\ C_v\ \gamma(\gamma-1)(\gamma+1)^{\frac{1}{3}}\ \zeta_c^2\ \lambda_3(f'_- - \dfrac{16}{49}\zeta_c^2)^3\ \sin\theta\ y^{-\frac{29}{7}} + \ldots \end{array} \right\} (x,y,\theta)$$

Calcul de la température sur la face aval de choc.

Elle se détermine à partir de la loi des gaz parfaits, on en déduit :

$$(34) \qquad T_+ = T_-(p_+ \rho_-)\,(p_- \rho_+)^{-1}$$

soit :

$$(35) \qquad T_+ = \gamma^{-1} R^{-1} \{1 + (\gamma+1)^{-\frac{1}{3}} [(\gamma+3)f'_- - 32(49)^{-1}(\gamma+1)\zeta_c^2]\, y^{-\frac{6}{7}} + \ldots\}$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer le tourbillon, dans la zone extérieure, sur le choc réel à l'ordre considéré, nous obtenons :

$$(36) \quad (\overrightarrow{rot}\, q)_+ = [A\, y^{-\frac{38}{7}} \sin\theta + O(y^{-\frac{39}{7}})\ ;\ B\, y^{-\frac{29}{7}} \sin\theta + O(y^{-\frac{30}{7}})\ ;$$
$$C\, y^{-\frac{25}{7}} + O(y^{-\frac{27}{7}})]_{(x,y,\theta)}$$

les constantes A, B et C se calculent à l'aide de la solution homogène. Si nous introduisons le saut $[\![f']\!]$ de la dérivée de la solution homogène on trouve :

$$(37) \quad \begin{cases} A = +\,12.7^{-3}\,(\gamma+1)^{\frac{2}{3}}\ \zeta_c^2\,\lambda_3\,(f_{o\,+} + 2\,\zeta_c\,f'_{o\,+})\ \ [\![f']\!]^3 \\ B = -\,6.7^{-2}\,(\gamma+1)^{\frac{2}{3}}\ \ \zeta_c^2\,\lambda_3\ \ [\![f']\!]^3 \\ C = -\,3.(14)^{-1}\,[\![f']\!]^3 \end{cases}$$

3.5. Abandon d'une des hypothèses.

Dans ce schéma tridimensionnel quelconque admettons les hypothèses fondamentales qui ont été formulées dans les cas de révolution ou plan et qui ont été vérifiées à posteriori par leurs conséquences.

a) Le tourbillon calculé sur la face aval du choc réel à l'ordre considéré est du même ordre à l'infini aval. Plus précisément le tourbillon est constant sur y = Cte.

b) Il existe une zone de raccord non vide.

De toute façon, le champ des vitesses doit satisfaire les équations de la dynamique des fluides. Nous obtenons, en particulier, que le champ intérieur défini par (20) doit satisfaire l'intégrale première

$$(38) \qquad \frac{h}{y}\,\frac{\partial u}{\partial \theta} + g\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Les quantités $\frac{1}{y}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}$ et $-\frac{\partial u}{\partial y}$ sont les composantes du tourbillon sur les axes y et θ. En tenant compte de l'hypothèse a) le tourbillon à l'infini aval dans la zone extérieure est connu et en particulier grâce à l'hypothèse b) dans la zone de raccord. Alors, dans ces conditions, dans la zone de raccord, l'équation (38) ne peut être vérifiée. Il faut donc abandonner au moins une des deux hypothèses, nous rejetterons d'abord l'hypothèse a) ce qui nous semble le plus raisonnable pour des raisons physiques. En effet, entre le choc et l'infini aval, dans la zone de raccord, l'écoulement doit être fortement perturbé si bien que les surfaces y égale Cte ne doivent plus représenter convenablement l'équation des surfaces de courant. A la lumière de ces résultats, nous sommes tout naturellement amenés à calculer le comportement du tourbillon à l'infini aval, dans la région extérieure.

3.6. Comportement du tourbillon à l'infini aval, dans la région extérieure.

La détermination du tourbillon est un problème aux limites fort difficile. En effet, l'équation vectorielle régissant l'évolution du tourbillon représente un système non linéaire de trois équations aux dérivées partielles, les conditions initiales étant imposées sur la face aval de l'onde de choc. En fait il n'est pas utile, pour l'étude qui nous concerne, de résoudre le problème en toute sa généralité. Il nous suffit, ce qui est déjà un gros travail comme nous allons le voir, de déterminer le premier ordre du tourbillon à l'infini aval, dans la zone extérieure. A cet effet, nous posons

(39) $\overrightarrow{rot}\ \vec{q} = \left[y^{-p}\, U(\zeta,\theta) + \ldots\ ;\ y^{-q}\, G(\zeta,\theta) + \ldots\ ;\ y^{-r}\, H(\zeta,\theta) + \ldots\right]_{(x,y,\theta)}$

lequel doit satisfaire la classique équation d'évolution

(40) $\overrightarrow{rot}\ \{(1 - \mu^2\, q^2)^{-1}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{q} \wedge \vec{q}\} = \vec{0}\ ;\ \mu^2 = (\gamma - 1)(\gamma + 1)^{-1}$

et les conditions initiales sur la face aval du choc dans la région extérieure, c'est-à-dire finalement la relation (36).

Les puissances p, q, r sont des constantes positives inconnues et U, G, H des fonctions inconnues non identiquement nulles. L'équation vectorielle (40), compte-tenu du développement (39), fournit un système de trois équations scalaires, le terme dominant de chacune d'entre elles dépendant essentiellement des valeurs relatives attribuées à p, q et r. Il s'agit donc d'étudier toutes les circonstances qui peuvent se présenter sans en laisser échapper une seule. En tenant compte des relations (9) et (39) l'équation d'évolution (40) fournit le système :

$$
(41)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\left\{\left[\frac{2}{7}\left(\frac{2}{7}+p\right)(f_o+2\zeta f_o') + \frac{8}{49}\,\zeta(3f_o'+2\zeta f_o'')\right]U + \frac{8}{49}\,\zeta(f_o+2\zeta f_o')\,\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right\} y^{-p-\frac{16}{7}} + \\
\qquad + \left[(q-1)\,G + \frac{4}{7}\,\zeta\,\frac{\partial G}{\partial\zeta}\right] y^{-q-1} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\, y^{-r-1} = 0 \text{ sur } \vec{x} \\
\frac{2}{7}(\gamma+1)^{-\frac{1}{3}}\left[(3f_o'+2\zeta f_o'')\,U + (f_o+2\zeta f_o')\,\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right] y^{-p-\frac{13}{7}} + (\gamma+1)^{-\frac{1}{3}}\,\frac{\partial G}{\partial\zeta}\, y^{-q-\frac{4}{7}} + \\
\qquad + \frac{2}{7}\,(f_o+2\zeta f_o')\,\frac{\partial H}{\partial\theta}\, y^{-r-\frac{16}{7}} = 0 \quad \text{sur } \vec{y} \\
(\gamma+1)^{-\frac{1}{3}}\left[f_3'\,U + f_3\,\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right]\sin\theta\, y^{-p-\frac{18}{7}} - \\
\qquad \left\{\left[(q+2)f_3 + \frac{4}{7}\zeta f_3'\right]G + \frac{4}{7}\zeta f_3\,\frac{\partial G}{\partial\zeta}\right\}\sin\theta\, y^{-q-\frac{21}{7}} + (\gamma+1)^{-\frac{1}{3}}\,\frac{\partial H}{\partial\zeta}\, y^{-r-\frac{4}{7}} = \\
\qquad\qquad 0 \text{ sur } \vec{\theta}\ .
\end{array}
\right.
$$

On pourrait être tenté, a priori, de faire appel au principe de moindre dégénérescence. Néanmoins, il semble difficile de l'appliquer ici ; en effet, quel critère adopter sur p, q et r pour pouvoir affirmer qu'on obtient le système le moins dégénéré, et même plus, la solution la moins dégénérée ! Nous avons donc renoncé à ce principe en étudiant systématiquement toutes les situations pouvant se présenter.

La technique utilisée consiste à prendre, dans une première étape, une des trois équations du système (41) par exemple l'équation sur l'axe $\vec{y}$, et à en conserver les trois termes. Nous obtenons ainsi entre p, q et r des égalités desquelles on tient compte dans les équations sur $\vec{x}$ et sur $\vec{\theta}$. Nous aboutissons alors à un système de 3 équations aux dérivées partielles plus simple que celui proposé. Puis, toujours sur l'équation $\vec{y}$, nous ne retenons que deux termes, d'où trois équations possibles, et des égalités et des inégalités sur p, q et r. L'étude des équations sur $\vec{x}$ et sur $\vec{\theta}$, en tenant compte de ces derniers résultats sur p, q et r, nous conduit à sept systèmes d'équations aux dérivées partielles. Enfin, nous ne conservons qu'un seul terme dans l'équation $\vec{y}$ d'où trois équations possibles avec, cette fois, seulement des inégalités entre p, q et r. L'influence de ces inégalités sur l'équation sur $\vec{x}$ et sur l'équation sur $\vec{\theta}$ nous donne dix systèmes d'équations aux dérivées partielles. Puisque nous envisageons l'étude de toutes les possibilités fournies par (41), tout le travail précédent est refait en reprenant pour point de départ d'abord l'équation sur $\vec{x}$ et enfin sur $\vec{\theta}$. Cette étude est évidemment fort longue, mais offre l'avantage d'être rigoureuse. Nous devons noter que les différentes situations mènent à des inégalités sur p, q et r, autrement dit nous avons des polyèdres dans l'espace des p, q et r. Nous obtenons finalement trente deux cas possibles en tenant compte de l'hypothèse : U, G et H ne peuvent être

identiquement nulles. En fait, parmi ces trente deux cas, il n'y a que dix neuf systèmes d'équations aux dérivées partielles différents. Il est cependant à remarquer que ces dix neuf systèmes sont très simples ou même dégénérés, ce qui nous permet de les intégrer sans difficulté. En tenant compte des conditions sur le choc (36) d'une part, de ce que les fonctions U, G et H restent bornées sur le choc d'autre part, nous éliminons trente des trente deux cas. Finalement, le terme dominant du tourbillon, à l'infini aval dans la région extérieure, doit nécessairement se trouver parmi les deux cas du tableau III.

TABLEAU III

Nous remarquons bien, comme nous nous y attendions, que le tourbillon n'est pas constant sur $y = Cte$.

3.7. Mise en évidence d'une contradiction dans le schéma tridimensionnel quelconque.

Nous allons tout d'abord appliquer le principe de raccordement aux tourbillons. Il se traduit formellement par la relation

$$(42) \qquad \lim \ \text{ext} \ (\overrightarrow{\text{rot}}\ q)_{\text{int}} \sim \lim \ \text{int} \ (\overrightarrow{\text{rot}}\ q)_{\text{ext}}$$

les abréviations "int" et "ext" signifiant respectivement intérieur et extérieur. Le rotationnel, pour le champ intérieur des vitesses, se calcule aisément à l'aide de (20) tandis que le rotationnel dans la zone extérieure a été calculé au paragraphe précédent. La relation (42) écrite pour les composantes sur $\vec{y}$ et sur $\vec{\theta}$ pour chacun des deux cas du tableau II, conduit, dans la zone de raccord, au comportement

$$(43) \qquad u(y,\theta) = 1 + \frac{7}{18} C\, y^{-\frac{18}{7}} - B\, y^{-n} \cos\theta + \ldots \qquad \frac{18}{7} < n \leq \frac{30}{7} \ ; \ C \neq 0$$

Nous avons vu que le principe de raccordement, appliqué au champ extérieur des vitesses, imposait le champ intérieur (20) avec le comportement (24). Nous allons donc calculer le comportement de la fonction $u(y,\theta)$ par le raccordement sur les vitesses, qui devra, bien entendu s'identifier à (43). Les trois fonctions $u(y,\theta)$, $g(y,\theta)$, $h(y,\theta)$ doivent satisfaire les équations de la dynamique des fluides donc en particulier l'intégrale première (38). Si y tend vers l'infini, nous posons

$$(44) \qquad u(y,\theta) = 1 + a\, y^{-n} + b(\theta)\, y^{-m} + \ldots \quad ; \quad m > n > 0, \quad a = Cte$$

substituant le comportement des fonctions g et h (24) et (44) dans l'intégrale première (38), nous obtenons la seule possibilité :

$$(45) \qquad a = 0 \quad ; \quad \frac{db}{d\theta} \sin\theta - m\, b \cos\theta = 0.$$

Le raccordement en vitesse donne donc pour $u(y,\theta)$ le comportement

$$(46) \qquad u(y,\theta) = 1 + K (\sin\theta)^m\, y^{-m} + \ldots \quad K = Cte \neq 0 \; ; \; m \neq 0$$

dans la zone de raccord.

La comparaison de (43) et de (46) met en évidence dans le cas général, l'incompatibilité du schéma tridimensionnel quelconque, schéma qui avait, jusqu'à présent, été adéquat pour un grand nombre d'écoulements. Cette incompatibilité d'ailleurs n'existe pas en fluide de dissipatif comme ont pu le montrer O.S. RYZHOV et E.D. TERENTEV [36]. Nous pouvons remarquer que la contradiction que nous avons mise en évidence aurait pu être révélée en utilisant l'équation de la divergence

$$(47) \qquad \operatorname{div}\left[(1 - \mu^2 q^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \vec{q}\right] = 0$$

mais la démonstration est moins directe que de passer par l'intégrale première (38), (cf. [17]). Il apparaît intéressant d'observer que l'incompatibilité ci-présente montre que l'hypothèse formulée en b) du paragraphe 3.5. est inadéquate. Soulignons que le calcul du tourbillon à l'infini aval dans la zone extérieure, qui ne fait intervenir, du reste, que le développement extérieur reste parfaitement valable.

Par la suite, nous serons amenés à introduire des hypothèses supplémentaires. Un premier type d'hypothèses nous conduira à une classe d'écoulements tridimensionnels à portance nulle pour laquelle le schéma type révolution reste valable. Puis, considérant la perturbation singulière créée par le terme φ_3^I dans le développement intérieur, nous introduisons un nouveau schéma qui nous donnera une classe d'écoulements tridimensionnels, faiblement portants.

4. Ecoulements de pseudo-révolution.

Nous désirons étendre, à des écoulements plus généraux que ceux de révolution, le schéma basé sur les travaux de D. EUVRARD [10]. Nous observons que le terme irrégulier φ_3^I, (18), est la cause, à l'ordre considéré, du bouleversement du développement intérieur (20), ainsi, d'ailleurs, que de la portance (23). A cet égard, remarquons que φ_3^R, (18), n'intervient pas dans le calcul de la portance car il tend vers zéro, quand ζ tend vers l'infini. Si nous voulons une généralisation saine des écoulements de révolution, c'est-à-dire, n'introduisant pas de nouvelles perturbations singulières, nous sommes conduits d'une façon naturelle, à imposer les hypothèses :

1) La partie singulière φ_3^I du développement extérieur est identiquement nulle, c'est-à-dire finalement $C_3^I = 0$.

2) Les fonctions $g(y,\theta)$ et $h(y,\theta)$ intervenant dans le développement intérieur du champ des vitesses sont identiquement nulles.

La portance que nous avons calculée en (23) est, grâce aux hypothèses 1) et 2), nulle. C'est cette classe d'écoulements à portance nulle que nous avons appelée classe des écoulements de pseudo-révolution. De tels écoulements ont une existence physique, il suffit d'envisager l'écoulement autour d'engins, possédant deux plans de symétrie ou une symétrie ternaire. Nous devons néanmoins faire observer, selon une remarque faite par RYZHOV, que dans les exemples donnés pour illustrer les écoulements de pseudo-révolution, les symétries évoquées imposent à la constante C_3^R d'être nulle. Si bien que le potentiel des vitesses φ est celui d'un écoulement de révolution jusqu'au terme y^{-1} au moins. Nous verrons par la suite que la non-révolution se manifestera par contre très fortement dans le développement intérieur du champ des vitesses. Pour les écoulements généraux de pseudo-révolution, la constante C_3^R est, bien entendu, non nulle.

4.1. Résultats généraux.

Dans la région extérieure, c'est-à-dire toujours pour ζ fixé et y tendant vers l'infini, le potentiel des vitesses et l'équation du choc s'écrivent

$$\varphi = x + y^{-\frac{2}{7}} f_o(\zeta) + y^{-\frac{4}{7}} f_1(\zeta) + y^{-\frac{6}{7}} f_2(\zeta) + y^{-1} f_3(\zeta) \cos\theta + \ldots ; \tag{48}$$

$$f_3(\zeta) = C_3^R \, t$$

$$\zeta = \zeta_c \left[1 + \lambda_1 y^{-\frac{2}{7}} + \lambda_2 y^{-\frac{4}{7}} + \lambda_3 y^{-\frac{5}{7}} \cos\theta + \ldots\right] \tag{49}$$

en tenant compte de l'hypothèse 1) dans les relations (9) et (10).

Les constantes C_3^R et λ_3 sont obtenues du système linéaire non-homogène (16), qui est de Cramer. Donc, à cet ordre, les développements extérieurs du potentiel des vitesses et du choc, sont connus. Quant au développement intérieur du champ des vitesses, les hypothèses 4.1) et 4.2) nous permettent de le chercher sous la forme

$$(50)\qquad \vec{q} = \left[u(y,\theta) + x^{-p}\,\tilde{f}(y,\theta) + \ldots\ ;\ x^{-p-1}\,\tilde{g}(y,\theta) + \ldots\ ;\ x^{-p-1}\,\tilde{h}(y,\theta) + \ldots\right]\ ;\qquad p > 0$$

la fonction $u(y,\theta)$ jouant le même rôle que la fonction $U(y)$ introduite dans les écoulements de révolution (3) et $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ étant de nouvelles fonctions inconnues. Il faudra également déterminer la constante p.

4.2. Détermination des trois premiers termes du champ intérieur des vitesses.

Il s'agit de calculer à p fixé, les trois fonctions $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$. Pour cela, on sait que l'écoulement est régi par les équations classiques

$$(51)\qquad \operatorname{div}\left\{(1-\mu^2 q^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}\,\vec{q}\right\} = 0$$

$$(52)\qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left\{(1-\mu^2 q^2)^{-1}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{q}\wedge\vec{q}\right\} = \vec{0}.$$

La substitution du champ (50) dans (51) et (52) montre que $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ doivent satisfaire un système de 3 , et non de 4, équations aux dérivées partielles. En effet, à l'ordre considéré, la projection de l'équation vectorielle (52) sur l'axe des x est une identité

$$(53)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{(1-\mu^2u^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}\,\tilde{g}\right\} + \dfrac{(1-\mu^2u^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{y}\,\tilde{g} + \dfrac{1}{y}\,\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left\{(1-\mu^2u^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}\,\tilde{h}\right\} - \\ \qquad - p(1-\mu^2u^2)^{\frac{1}{\gamma-1}-1}\,(1-u^2)\,\tilde{f} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left\{(1-\mu^2u^2)^{-1}\left(\dfrac{\tilde{h}}{y}\,\dfrac{\partial u}{\partial\theta} + \tilde{g}\,\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} - p(1-\mu^2u^2)^{-2}\left\{(1+\mu^2u^2)\,\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\,\tilde{f} + \right. \\ \qquad \left. + (1-\mu^2u^2)\,u\,\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}\right\} = 0 \\ p(1-\mu^2u^2)^{-2}\left\{(1+\mu^2u^2)\,\dfrac{\partial u}{\partial y}\,\tilde{f} + (1-\mu^2u^2)\,u\,\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial y}\right\} - \\ \qquad - \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{(1-\mu^2u^2)^{-1}\left(\dfrac{\tilde{h}}{y}\,\dfrac{\partial u}{\partial\theta} + \tilde{g}\,\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} = 0 \end{cases}$$

Le problème est complexe car, par rapport aux écoulements plans ou de révolution, nous avons à résoudre à chaque étape non plus un système différentiel ordinaire mais un système de trois équations aux dérivées partielles (53). Les trois fonctions inconnues $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ doivent en outre vérifier les conditions de raccord avec le développement extérieur ainsi qu'une condition de glissement sur $y = 0$, $x > 0$, ce qui constitue les conditions aux limites.

Nous avons trouvé une solution particulière de (53).

$$(54) \qquad \tilde{f} \equiv y^{-1}\, b(\theta)\, \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \tilde{g} \equiv p\, y^{-1}\, b(\theta)\, u, \quad \tilde{h} \equiv 0$$

où $b(\theta)$ est une fonction arbitraire. Si (54) est bien une solution particulière de (53), en revanche elle n'est pas solution de notre problème puisqu'elle ne satisfait pas à la condition de glissement. Nous inspirant de (54), nous avons exhibé une solution satisfaisant cette fois à toutes les conditions

$$(55) \qquad \begin{cases} \tilde{f}(y,\theta) \equiv \dfrac{K}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}(y,\theta) & \displaystyle\int_0^y \frac{1-u^2(\eta,\theta)}{u^2(\eta,\theta)}\,\eta\, d\eta + K\,\frac{1-u^2u^2(y,\theta)}{u(y,\theta)} \\ \tilde{g}(y,\theta) \equiv \dfrac{Kp}{y}\,u(y,\theta) & \displaystyle\int_0^y \frac{1-u^2(\eta,\theta)}{u^2(\eta,\theta)}\,\eta\, d\eta \quad ; \quad K = \text{Cte} \neq 0 \\ \tilde{h}(y,\theta) \equiv 0 & \end{cases}$$

Le principe de raccordement appliqué aux champs extérieurs (48) et intérieurs (50) compte-tenu de (55) détermine les indices de puissance et la constante K. Le champ intérieur des vitesses est donc déterminé explicitement jusqu'au troisième ordre.

$$(56) \qquad \vec{q} = \begin{pmatrix} u(y,\theta) + x^{-\frac{3}{2}} f_o(y,\theta) + x^{-2} f_1(y,\theta) + O(x^{-\frac{5}{2}}) \\ x^{-\frac{5}{2}} g_o(y,\theta) + x^{-3} g_1(y,\theta) + O(x^{-\frac{7}{2}}) \\ O(x^{-\frac{7}{2}}) \end{pmatrix}$$

les couples (f_o,g_o), (f_1,g_1) étant déduits de (55) en y faisant respectivement $p = \frac{3}{2}$ et $p = 2$.

Remarque. Les fonctions déterminées par (55) sont encore solution du système (53) jusqu'à $p = \frac{5}{2}$, ce n'est qu'au delà de $p = \frac{5}{2}$, que le système (53) n'est plus homogène et que la projection sur $\vec{x}$ de (52) n'est plus une identité. Cependant le couple (f_2,g_2) obtenu de (55) en y faisant $p = \frac{5}{2}$ ne convient pas à notre problème, car par raccordement le terme φ_3^R impose h non identiquement nul.

4.3. Comportement du tourbillon à l'infini aval, dans la zone extérieure.

Nous allons utiliser les résultats du paragraphe 3.6. qui sont, comme nous l'avons signalé, toujours valables, pour déterminer le comportement de la fonction $u(y,\theta)$ dans la zone de raccordement.

Le tourbillon dans la région intérieure se calcule aisément à partir de (56)

$$(57)\quad (\overrightarrow{rot}\ \vec{q})_{int} = \left[y^{-1}\, x^{-\frac{5}{2}}\, \frac{\partial g_o}{\partial \theta} + \ldots\ ;\ y^{-1}\, \frac{\partial u}{\partial \theta} + \ldots\ ;\ -\frac{\partial u}{\partial y} + \ldots\right]$$

et le tourbillon dans la zone extérieure se trouve dans le tableau II.

Envisageant le cas I, on montre que le raccord en tourbillon est impossible. Cette situation est donc à rejeter pour les écoulements de pseudo-révolution. Puis, s'intéressant au cas II du tableau III, il s'avère que le raccordement a bien lieu à condition de restreindre les inégalités portant sur p et q. Plus précisément, le comportement du tourbillon dans la zone extérieure doit être

$$(58)\quad \overrightarrow{rot}\ \vec{q} = \left[y^{-\frac{24}{7}}\, U(\zeta,\theta) + \ldots\ ;\ y^{-q}\, B \sin\theta + \ldots\ ;\ y^{-\frac{25}{7}}\, C + \ldots\right]\ ;$$

$$\frac{25}{7} < q < \frac{33}{7}$$

Dans la zone de raccord, si l'on pose

(59) $\quad U(\zeta,\theta) = \zeta^{-\alpha}\ \mathcal{U}(\theta) + \ldots \ ;\ \alpha \geq 0\ ,\ \mathcal{U}(\theta)$ fonction arbitraire,

pour y fixé et ζ tendant vers l'infini, on trouve $\alpha = \frac{5}{2}$ et par suite, dans la zone de raccordement, le tourbillon a pour partie principale

(60) $\quad \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{q} = \left[y^{-\frac{14}{7}}\ x^{-\frac{5}{2}}\ \mathcal{U}(\theta) + \ldots\ ;\ y^{-q}\ B \sin\theta + \ldots\ ;\ y^{-\frac{25}{7}}\ C + \ldots\right]$

$$\frac{25}{7} < q < \frac{33}{7}$$

(61) $\quad \mathcal{U}(\theta) = \lim_{y\to\infty} \left\{\frac{3}{2}\ \frac{K}{y}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ \left[\int_0^y \frac{1-u^2(\eta,\theta)}{u^2(\eta,\theta)}\ \eta\ d\eta\right]\right\}$

Nous déduisons de ces résultats que dans la zone de raccord, la fonction $u(y,\theta)$ doit avoir pour comportement

(62) $\quad u(y,\theta) = 1 + \frac{7}{18}\ C\ y^{-\frac{18}{7}} - B \cos\theta\ y^{-(q-1)} + \ldots\ ;\ \frac{18}{7} < q-1 < \frac{26}{7}$

La convergence de (61), quand y tend vers l'infini, est assurée grâce à (62).

Figure 4

Nous constatons que pour les écoulements de pseudo-révolution, les raccordements, en vitesse et en tourbillon, ne donnent lieu à aucune contradiction et que les équations de la dynamique des fluides sont bien vérifiées. Ainsi, l'incompatibilité mise en évidence en 3.7. pour les écoulements tridimensionnels quelconques, est levée pour les écoulements de pseudo-révolution.

Afin d'avoir quelques renseignements d'ordre qualitatif sur le mouvement du fluide, il est intéressant d'observer que le tourbillon, dans la

zone de raccord (60), a une composante sur l'axe des x qui est prépondérante sur les deux autres. Cela signifie que le fluide devient fortement tourbillonnaire selon cet axe, quand de y infini on s'approche de l'axe des x. Autrement dit, le fluide tourne, dans une direction de plan x égal constante.

Il est bien clair, sur ces résultats, que l'hypothèse affirmant que le tourbillon est constant sur les surfaces y égal constante est parfaitement fausse pour ces écoulements. De même que l'hypothèse selon laquelle l'écoulement a lieu par tranches (à θ fixé) est aussi inadéquate que la précédente: En effet, si cela était, on devrait à l'infini aval, dans la zone extérieure, retrouver le comportement du tourbillon sur le choc.

4.4. Passage aux écoulements incompressibles.

Nous savons qu'on peut passer des équations des fluides compressibles aux équations des fluides incompressibles, en faisant tendre formellement γ vers l'infini, soit μ vers 1. Les équations (51) et (52) donnent

$$(63) \qquad \operatorname{div} \vec{q} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \{(1-q^2)^{-1} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, q \wedge \vec{q}\} = \vec{0}.$$

Il est facile de montrer que le champ des vitesses (56), lorsqu'on fait tendre μ vers 1, est solution des équations (63). Autrement dit, si le couple (f_p, g_p) est une solution des équations des écoulements de pseudo-révolution compressibles et si $(\hat{f}_p, \hat{g}_p)$ est obtenu par le passage à la limite :

$$(64) \qquad (\hat{f}_p, \hat{g}_p) = \lim_{\mu \to 1} (f_p, g_p)$$

le couple $(\hat{f}_p, \hat{g}_p)$ est solution des équations d'Euler incompressible.

Ceci signifie que nous avons obtenu par ce procédé, une solution asymptotique de fluides incompressibles, tourbillonnaires, donc une solution asymptotique pour les fluides incompressibles des équations d'Euler en tridi-

dimensionnel. On peut remarquer que le terme dominant de (56) correspond à un écoulement de direction constante mais de module variable, ce qui en quelque sorte est un écoulement, compressible ou incompressible, de fluides stratifiés.

5. Ecoulements faiblement portants.

5.1. Présentation du problème.

Nous avons montré dans le paragraphe 3.7. qu'il n'était pas possible de traiter les écoulements tridimensionnels quelconques comme les écoulements de révolution ou de pseudo-révolution. Nous avons vu, en effet, que la partie singulière φ_3^I du terme φ_3 intervenant dans le potentiel des vitesses, donne une incompatibilité dans le raccordement. Nous préciserons ce point ultérieurement. Il est donc nécessaire d'introduire un autre type de schéma si l'on désire étudier des écoulements plus généraux que les précédents. Nous avons déjà remarqué que φ_3^I, c'est-à-dire finalement la constante C_3^I, était d'une part directement liée à la portance (23) et d'autre part responsable du changement profond subi par le développement intérieur (§3.2.). Nous verrons par la suite que ces deux faits sont d'ailleurs liés.

Il apparaît donc naturel d'étudier l'écoulement obtenu lorsque C_3^I est "petit", c'est-à-dire de perturber un écoulement de pseudo-révolution. C'est la raison pour laquelle nous allons développer une théorie de perturbation, à l'aide d'un petit paramètre formel ε qui ne sera autre chose que C_3^I. Nous obtiendrons, comme nous le montrerons, des écoulements tridimensionnels faiblement portants.

Ainsi, le travail qui va suivre aura pour but de donner un schéma cohérent pour déterminer asymptotiquement, à grande distance de l'obstacle, l'écoulement s'établissant autour de corps tridimensionnels faiblement portants en régime sonique.

5.2. Ecoulement linéarisé au voisinage d'un écoulement de pseudo-révolution.

Supposons connu, en tout point, le champ des vitesses $\vec{\tilde{q}}^{(0)}$ d'un écoulement de pseudo-révolution. Introduisant un petit paramètre formel ε, nous cherchons le champ des vitesses sous la forme :

$$\vec{\tilde{q}}_D = \vec{\tilde{q}}^{(0)} + \varepsilon \vec{\tilde{q}}^{(1)} + \ldots \tag{65}$$

$\vec{\tilde{q}}^{(1)}$ étant le premier terme de perturbation tridimensionnelle. Le champ des vitesses $\vec{\tilde{q}}_D$ doit satisfaire les équations de la dynamique des fluides (51) et (52). La perturbation $\vec{\tilde{q}}^{(1)}$ doit alors être solution du système

$$\mathcal{L}_j(\vec{\tilde{q}}^{(0)}, \vec{\tilde{q}}^{(1)}) = \mathcal{M}_j(\vec{\tilde{q}}^{(0)}) \; ; \; j = (1, 2, 3, 4) \tag{66}$$

qui représente les équations du mouvement, linéarisées au voisinage de $\vec{\tilde{q}}^{(0)}$. L'opérateur $\mathcal{L}_j$ est linéaire en $\vec{\tilde{q}}^{(1)}$; $\mathcal{M}_j(\vec{\tilde{q}}^{(0)})$ est un second membre ne dépendant que de $\vec{\tilde{q}}^{(0)}$, qui est en fait identiquement nul puisque $\vec{\tilde{q}}^{(0)}$ est solution au premier ordre des équations du mouvement. Ces quatre équations aux dérivées partielles sont explicitées dans le tableau IV.

TABLEAU IV

Le système (66) est linéaire certes, mais il est hors de question de la résoudre en toute généralité puisque le terme dominant $\vec{\tilde{q}}^{(0)}$ n'est connu qu'asymtotiquement. C'est précisément une des difficultés du problème traité par rapport aux théories classiques de perturbations. Toutes les informations que nous possédons portent non pas sur $\vec{\tilde{q}}^{(0)}$ mais sur $\vec{q}^{(0)}$ champ des vitesses de l'écoulement de pseudo-révolution à grande distance de l'obstacle. Aussi, dans toute la suite de ce travail, nous développerons une théorie asymptotique, à grande distance de l'obstacle, au sein de la théorie linéarisée.

Nous observons que le champ des vitesses en amont du choc est connu uniformément à grande distance de l'obstacle par les travaux de D. EUVRARD [12]. L'écoulement amont étant connu et fixé le problème va consister à trouver l'écoulement s'établissant en aval du choc. Dans tout ce qui suivra, sauf mention expresse du contraire, les coordonnées seront représentatives d'un point situé en aval du choc. A grande distance de l'obstacle, $\vec{q}_D$, $\vec{q}^{(0)}$, $\vec{q}^{(1)}$ seront respectivement notés $\vec{q}_D$, $\vec{q}^{(0)}$, $\vec{q}^{(1)}$ et seront fonction des coordonnées (x, y, θ) ou (y, ζ, θ). A grande distance de l'obstacle (65) devient

$$\vec{q}_D = \vec{q}^{(0)} + \varepsilon\, \vec{q}^{(1)} + \ldots \tag{67}$$

Il est utile de se souvenir que pour ζ fixé et y tendant vers l'infini, nous avons admis, paragraphe 3, qu'un écoulement tridimensionnel, en aval de l'onde de choc, avait pour potentiel des vitesses

$$\varphi_E = \left[x+y^{-2/7} f_o(\zeta)+y^{-4/7} f_1(\zeta)+y^{-6/7} f_2(\zeta)+y^{-1} C_3^R\, t\cos\theta + \ldots\right] + C_3^I\left[y^{-1}\cos\theta + \ldots\right] + \ldots \tag{68}$$

Nous remarquons que le premier crochet de (68) représente le potentiel extérieur d'un écoulement de pseudo-révolution et que le deuxième crochet peut être interprété comme étant un potentiel extérieur de perturbation. Si bien que le champ des vitesses $\vec{q}_D$ admet le potentiel φ_D quand ζ est fixé et y tend vers l'infini, c'est-à-dire en limite extérieure, pourvu que $\varepsilon = C_3^I$. Nous poserons donc

$$\vec{q}_{D,E} = \vec{q}_E^{(0)} + \varepsilon\, \vec{q}_E^{(1)} + \ldots \quad ; \tag{69}$$

avec (70) $\vec{q}_E^{(1)} = (0 + \ldots\ ;\ -y^{-2}\cos\theta + O(y^{-p},\theta)\ ;\ -y^{-2}\sin\theta + O(y^{-q},\theta))$, $p,q > 2$ pour ζ fixé $> \zeta_c$ et $y \to \infty$.

La relation (67) pour y fixé, $\zeta = (\gamma+1)^{-1/3} xy^{-4/7}$ et $x \to \infty$, représente un développement intérieur au sens des écoulements de révolution ou de pseudo-révolution, nous posons

$$(71)\quad \vec{q}_I^{(1)} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x^{-n_i} \bar{f}_i^{(1)}(y,\theta) \; ; \; \sum_{i=1}^{\infty} x^{-p_i} \bar{g}_i^{(1)}(y,\theta) \; ; \; \sum_{i=1}^{\infty} x^{-q_i} \bar{h}_i^{(1)}(y,\theta) \Big) \; ;$$

$$n_i, p_i, q_i \geq 0 \qquad \forall i \text{ , } \underline{y \text{ fixé}} \text{ , } x \to \infty \text{ .}$$

Le principe de raccordement appliqué entre (70) et (71) montre que

$$(72)\quad \lim_{y\to\infty} \bar{g}_1^{(1)} = -y^{-2} \cos\theta + O(y^{-p},\theta) \; ; \; \lim_{y\to\infty} \bar{h}_1^{(1)} = -y^{-2} \sin\theta + O(y^{-q},\theta) \; ;$$

$$p,q > 2$$

$$(73)\quad p_1 = q_1 = 0$$

l'exposant n_1 étant indéterminé à l'ordre considéré. Ainsi, pour y fixé et x tendant vers l'infini, le champ des vitesses $\vec{q}_D$ s'écrit

$$(74)\quad \vec{q}_{D,I} = \vec{q}_I^{(0)} + \varepsilon \vec{q}_I^{(1)} + \ldots$$

$\vec{q}_I^{(0)}$ étant le champ intérieur des vitesses d'un écoulement de pseudo-révolution défini par la relation (56) du paragraphe 4.2.. D'où

$$(75)\quad \vec{q}_{D,I} = (u(y,\theta) + \ldots \; ; \; x^{-5/2} g_o(y,\theta) + \ldots \; ; \; 0 + \ldots) +$$

$$\varepsilon \, (x^{-n_1} \bar{f}_1(y,\theta) + \ldots \; ; \; x^0 \bar{g}_1^{(1)}(y,\theta) + \ldots \; ; \; x^0 \bar{h}_1^{(1)}(y,\theta) + \ldots) + \ldots$$

5.3. Existence, à l'infini aval, d'une perturbation singulière due à la portance.

La théorie linéarisée développée correspond à ε petit certes, mais à ε fixé lorsqu'on va vers l'infini. Si bien que la relation (75) est formellement

la même que (20), en effet on peut écrire (75)

$$(76) \qquad \vec{q}_{D,I} = (u(y,\theta)\, x^0 + \ldots \; ; \; \varepsilon\, \bar{g}_1^{(1)}(y,\theta)\, x^0 + \ldots \; ; \; \varepsilon\, \bar{h}_1^{(1)}(y,\theta)\, x^0 + \ldots)$$

Le champ des vitesses donné par (65) doit satisfaire le système (66) donc en particulier (75) doit en être aussi une solution. La substitution de (75) dans le système (66) conduit à la relation

$$(77) \qquad \frac{\bar{h}_1^{(1)}}{y} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \bar{g}_1^{(1)} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

qui est formellement la même que celle obtenue en (38) paragraphe 3.5.

Le calcul du comportement du tourbillon, à l'infini aval, dans la zone extérieure que nous avons déterminée au paragraphe 3.6. est toujours valable puisqu'il ne fait intervenir que le développement extérieur qui est formellement le même que (69).

Aussi, les trois conditions précédentes sont les mêmes que celles qui nous ont permis de prouver l'incompatibilité du schéma tridimensionnel quelconque au paragraphe 3.7.. La même démonstration s'applique donc, d'où il résulte que cette théorie linéarisée est, elle aussi, incompatible. Une des causes de cette incompatibilité, pour les écoulements linéarisés (respectivement quelconques) réside dans l'intégrale première (77) (respectivement (38)). Il est donc nécessaire d'introduire une hypothèse supplémentaire pour ne plus avoir cette intégrale première. Nous ne nous intéresserons dans tout ce qui suit qu'à la théorie linéarisée, c'est-à-dire que nous utiliserons le système (66). Si nous observons les équations obtenues en substituant (75) dans (66) nous remarquons que l'hypothèse $n_1 \geq 0$ formulée en (71) doit être élargie. Afin d'avoir le maximum de souplesse nous supposerons n_1 quelconque,

donc, en particulier, il pourra prendre des valeurs négatives. Avec cette nouvelle hypothèse nous substituons (75) dans le système (66). Les équations (a), (b), (c) et (d) du tableau IV peuvent se mettre sous la forme

$$(78)\qquad \begin{cases} A_{11}\, x^{\circ} + A_{12}\, x^{-n_1-1} = 0 \\ A_{21}\, x^{\circ} + A_{22}\, x^{-n_1-1} = 0 \\ A_{31}\, x^{\circ} + A_{32}\, x^{-n_1-1} = 0 \end{cases} \quad ; A_{ij} \neq 0 \quad \forall i = (1,2,3) \text{ et } \forall j = (1,2)$$

l'équation (b) du tableau III devenant une identité à l'ordre considéré. Les expressions A_{ij} étant des fonctions de u, $\bar{f}_1^{(1)}$, $\bar{g}_1^{(1)}$, $\bar{h}_1^{(1)}$ et de leurs dérivées premières par rapport à y et θ. Nous observons sur (78) que trois éventualités seulement peuvent se présenter

$$(79)\qquad -n_1-1 > 0 \quad ; \quad -n_1-1 = 0 \quad ; \quad -n_1-1 < 0 .$$

On étudie systématiquement chacun de ces trois cas. La situation $n_1 < -1$ conduit à $\bar{f}_1^{(1)} \equiv 0$ cas qui est à rejeter puisque le terme dominant $\vec{x}.\vec{q}_I^{(1)}$ serait nul pour tout $n_1 < -1$. Si maintenant on envisage $n_1 > -1$ on aboutit à l'intégrale première (77) et ce cas doit être éliminé aussi car on retomberait sur l'incompatibilité précédente. En fait, seul $n_1 = -1$ ne conduit à aucune impossibilité. Nous avons donc exhibé rigoureusement l'indice, et le seul, convenable pour ne plus avoir la contradiction précédente.

Nous remarquons, bien que nous n'y ayions point fait appel, que le principe de moindre dégénérescence est satisfait par la condition $n_1 = -1$.

En tenant compte de (75) et de $n_1 = -1$, le champ des vitesses $\vec{q}_{D,I}$ s'écrit

$$(80)\qquad \vec{q}_{D,I} = (u(y,\theta) + \ldots\ ;\ x^{-5/2}\, g_o(y,\theta) + \ldots\ ;\ 0 + \ldots) +$$

$$\varepsilon(x^1\, \bar{\vec{f}}_1^{(1)}(y,\theta) + \ldots\ ;\ x^o\, \bar{g}_1^{(1)}(y,\theta) + \ldots\ ;\ x^o\, \bar{h}_1^{(1)}(y,\theta) + \ldots) + \ldots$$

quand y et θ sont fixés et x tend vers l'infini, les fonctions $\bar{g}_1^{(1)}$ et $\bar{h}_1^{(1)}$ ayant toujours le comportement (72). On sait qu'un développement asymptotique est dit être uniformément valable dans l'espace ou dans le temps si l'erreur est uniformément petite par rapport à ces variables. Certains développements asymptotiques ont des coefficients présentant des singularités par exemple

$$(81)\qquad \varepsilon\, y'' + \sqrt{x}\, y' - y = 0 \quad , \quad x\in[0,1] \ , \ y(0) = 0, \ y(1) = e^2$$

admet le développement (cf. J. COLE [8])

$$(82)\qquad y(x,\varepsilon) = e^{2/\sqrt{x}}\ \{1-\varepsilon(\frac{1}{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}) + 0\ (\frac{\varepsilon^2}{x^{5/2}})\}.$$

Le deuxième terme présente une singularité en $x = 0$; le premier terme $e^{2/\sqrt{x}}$ est une bonne approximation seulement pour $x >> \varepsilon$, les deux premiers termes seulement pour $x >> \varepsilon^{4/5}$. Le développement asymptotique précédent n'est donc pas uniformément valable dans $[0,1]$. Nous sommes en présence d'une perturbation singulière localisée au voisinage de $x = 0$. Nous observons que le champ des vitesses $\vec{q}_{D,I}$ représenté par le développement asymptotique en ε donné par (80) n'est pas uniformément valable dans $\mathbb{R}^3$ puisque le terme $x^1\, \bar{\vec{f}}_1^{(1)}(y,\theta)$ n'est pas borné quand x tend vers l'infini. Donc, à ε petit fixé, y fixé et x tendant vers l'infini, le développement (80) ne peut plus représenter l'écoulement. Ceci signifie qu'existe une perturbation singulière localisée à x infini et y borné. Il faut donc abandonner l'idée d'élaborer une théorie en ε avec un seul développement. Nous introduirons classiquement un développement distal et un développement proximal et nous montrerons ultérieu-

rement que ce schéma à deux développements est cohérent. Nous verrons également à la fin de ce travail que la portance est proportionnelle au paramètre ε.

Nous comprenons maintenant pourquoi la théorie linéarisée à un développement est incompatible : en plus de la perturbation singulière due au tourbillon, existe une nouvelle perturbation singulière due à la portance.

5.4. Information sur le développement distal.

Nous prendrons pour développement distal le champ des vitesses $\vec{q}_D$ fonction des coordonnées défini par

$$\vec{q}_D = \vec{q}^{(0)} + \varepsilon \vec{q}^{(1)} + \ldots \tag{83}$$

valable en aval de l'onde de choc, pour x et y(> 0) grands, θ fixé. Le vecteur $\vec{q}^{(0)}$ étant le champ asymptotique des vitesses représenté par les développements (48) et (56) tandis que le vecteur $\vec{q}^{(1)}$ est la perturbation tridimensionnelle. Nous avons montré, au paragraphe précédent, que la perturbation singulière avait lieu pour x infini mais y borné. Il vient donc à propos d'introduire la variable ζ dans (83) et de faire tendre y vers l'infini à ζ fixé. Dans ces conditions $\vec{q}_D$ défini par (83) est représenté par ce que nous avons noté au paragraphe 5.2, formule (69), $\vec{q}_{D,E}$, qui admet le potentiel des vitesses (68). En conclusion, le développement distal extérieur du champ des vitesses est connu, et n'est que le prolongement analytique de $\vec{\tilde{q}}_D$ à ζ fixé quand y tend vers l'infini puisqu'il n'existe aucune perturbation singulière en y et θ. Ainsi, $\vec{q}_{D,E}$ est connu dans ses premiers termes.

5.5. Concepts de passage à la limite.

On remarque sur le champ des vitesses déterminé par (83) que si l'on fait tendre ε vers 0 en gardant x, y, θ fixés, on retrouve le champ des vi-

tesses d'un écoulement de pseudo-révolution. En revanche, si l'on fait tendre x vers + ∞ en conservant ε, y, θ fixés nous avons montré que (81) ne pouvait plus représenter l'écoulement puisque $|\vec{q}^{(1)}| \neq O(x)$. On peut donc dire "grosso modo" qu'on ne peut faire tendre ε vers zéro et x vers l'infini indépendamment l'un de l'autre si l'on désire d'une part ne pas retrouver les écoulements de pseudo-révolution et d'autre part ne pas rencontrer d'impossibilité.

Nous introduisons classiquement une variable proximale ξ et un développement proximal $\vec{q}_p(\xi,y,\theta)$ respectivement définis par

$$\xi = x^{-l}\ \varepsilon^{-\alpha} \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \tag{84}$$

$$\vec{q}_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{n_i} f_{p,i}(\xi,y,\theta) \ ; \ \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{p_i} g_{p,i}(\xi,y,\theta) \ ; \ \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{q_i} h_{p,i}(\xi,y,\theta) \Big) \ ; \ n_i, p_i, q_i \geq 0 \quad \forall i \tag{85}$$

la constante α, les indices de puissance n_i, p_i, q_i, ainsi que les fonctions $f_{p,i}$, $g_{p,i}$ et $h_{p,i}$ étant connus. Il nous faut maintenant nous donner le moyen de raccorder le développement distal $\vec{q}_D$ (83) avec le développement proximal $\vec{q}_p$ (85).

Limites distale et proximale. Elles peuvent être définies pour y borné. La limite distale classique consisterait à fixer la variable distale x c'est-à-dire le point géométrique et à faire tendre le petit paramètre ε vers zéro. En ce qui concerne le problème traité nous avons vu que le point géométrique devait s'éloigner vers l'infini. Afin d'avoir encore une limite distale nous devons nous arranger pour que le point géométrique, tout en tendant vers l'infini, reste hors de la perturbation singulière due à ε. En revanche, en limite pro-

ximale, le point géométrique devra tendre vers l'infini tout en restant dans la perturbation singulière due à ε.

Afin de satisfaire à ces conditions, nous introduisons une fonction $\eta(\varepsilon)$ satisfaisant

$$(86) \qquad O(\varepsilon^{\alpha}) < O(\eta) < O(1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\eta}{\varepsilon^{\alpha}} \to \infty \quad \text{quand } \eta \to 0$$

et nous définissons la variable distale ξ_{η} par

$$(87) \qquad \xi_{\eta} = x^{-1}\, \eta^{-1} .$$

Les limites distale et proximale sont alors définies par

$$(88) \qquad \text{limite distale} \equiv \lim_{D} \equiv \lim_{\substack{y,\theta,\xi_{\eta} \text{ fixés} \\ \varepsilon \to 0}}$$

$$(89) \qquad \text{limite proximale} \equiv \lim_{P} \equiv \lim_{\substack{y,\theta,\xi \text{ fixés} \\ \varepsilon \to 0}}$$

Nous remarquons que $\lim_{D}$ implique que $\xi \to \infty$ et $x \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$. C'est-à-dire que x tend vers l'infini moins vite que ε^{α} ne tend vers zéro, comme nous le désirions.

Limites extérieure et intérieure. Une des différences avec les limites précédentes est que le petit paramètre est ici ce que VAN DYKE [53] appelle un "coordinate-like". Dans les deux processus de passage à la limite que nous allons définir, nous imposerons au point géométrique de rester dans la perturbation singulière due à ε. Pour ce faire, nous introduisons une fonction $\delta(\varepsilon)$ satisfaisant

(90) $\quad O(\delta) < O(\varepsilon^{\alpha}) \Longrightarrow \dfrac{\delta}{\varepsilon^{\alpha}} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$

et la quantité ξ_{δ} définie par

(91) $\quad \xi_{\delta} = x^{-1}\ \delta^{-1}$.

Nous définissons maintenant les limites extérieure et intérieure par

(92) $\quad$ limite extérieure $\equiv \lim_{E} \equiv \lim\limits_{\substack{\zeta,\theta,\xi_{\delta}\ \text{fixés} \\ \varepsilon\to 0}}$

(93) $\quad$ limite intérieure $\equiv \lim_{I} \equiv \lim\limits_{\substack{y,\theta,\xi_{\delta}\ \text{fixés} \\ \varepsilon\to 0}}$

Nous observons que ξ_{δ} fixé et $\varepsilon \to 0$ implique $\xi \to 0$ et $x \to \infty$. La relation (84) nous montre alors que x tend vers l'infini plus vite que ε^{α} ne tend vers zéro et l'on reste bien dans la perturbation singulière due à ε.

Remarques.

$$\lim_{D} \Longrightarrow \lim_{\substack{y,\theta\ \text{fixés} \\ \xi\to\infty,\ x\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \quad ; \quad \lim_{E} \Longrightarrow \lim_{\substack{\zeta,\theta\ \text{fixés} \\ \xi\to 0 \\ \varepsilon\to 0}} \quad ; \quad \lim_{I} \Longrightarrow \lim_{\substack{y,\theta\ \text{fixés} \\ \xi\to 0 \\ \varepsilon\to 0}}$$

Enfin, notons que les quatre passages à la limite définis respectivement par (88), (89), (92) et (93) entrent bien dans le cadre général des théories de perturbations singulières exposées par M. VAN DYKE [53] ou par S. KAPLUN [24].

5.6. Application du principe de raccordement.

Pour le moment nous connaissons, dans ses premiers termes, $\vec{q}_{D,E}$ par son potentiel des vitesses (68). En revanche, le développement distal pour y borné et x tendant vers l'infini que nous appellerons $\vec{q}_{D,I}$ ainsi que le développement proximal $\vec{q}_p$ nous sont inconnus.

Figure 5

En vue d'appliquer le principe de raccordement nous faisons les observations suivantes :

a)

$$(94) \qquad \lim_P \vec{q}_D \Longrightarrow \lim_{\substack{y,\theta \text{ fixés} \\ x\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \vec{q}_D \qquad \text{d'où}$$

$$(95) \qquad \lim_P \vec{q}_D \sim \lim_{\substack{y,\theta \text{ fixés} \\ x\to\infty}} \vec{q}^{(0)}$$

Or, $\vec{q}^{(0)}$ étant le champ des vitesses d'un écoulement de pseudo-révolution il n'a pas de perturbation singulière due à ε et par conséquent il est valable pour x tendant vers l'infini. Ce développement en puissances de x est connu : c'est le développement (56) de la théorie des écoulements de pseudo-révolution. Ainsi, $\vec{q}_{D,I}$ est connu dans ses premiers termes, c'est pratiquement le champ des vitesses du pseudo-révolution quand y est borné et x tend vers l'infini

$$(96) \quad \lim_P \vec{q}_D \sim (u(y,\theta)+x^{-3/2} f_o(y,\theta)+\ldots \; ; \; x^{-5/2} g_o(y,\theta)+x^{-3} g_1(y,\theta)+\ldots \; ; \; O(x^{-7/2})) + \ldots$$

b)

$$(97)\quad \lim_I \vec{q}_{D,E} \Longrightarrow \lim_{\substack{y,\theta \text{ fixés} \\ x\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \vec{q}_{D,E}$$

Puisque $\vec{q}_{D,E}$ dérive du potentiel (68) qui est connu asymptotiquement, le comportement de $\vec{q}_{D,E}$ en limite intérieure est connu. Il s'exprime par

$$(98)\quad \lim_I \vec{q}_{D,E} \sim (1+b_1 x^{-3/2} y^{o} + \ldots ; c_1 x^{-5/2} y^{-1} + \ldots ; d_1 x^{-7/2} y^{o} \sin\theta + \ldots) +$$

$$+ \ (0+\ldots ; -y^{-2} \cos\theta + \ldots ; -y^{-2} \sin\theta + \ldots)$$

les constantes b_1, c_1 dépendent de γ et de a_2, et la constante d_1 dépend en outre de C_3^R.

Nous allons maintenant appliquer le principe de raccordement en "distal-proximal" (flèche (1) de la figure 5) d'une part et en "extérieur-intérieur" (flèche (2) de la figure 5) d'autre part en tenant compte des résultats (96) et (98). Nous prendrons soin de développer suffisamment loin les différents développements car, par exemple, un terme de $\vec{q}_p$ peut avoir plusieurs impacts dans les autres développements.

Principe de raccordement en "distal-proximal".

Nous l'appliquons systématiquement à l'aide de (88) et (89) entre les développements $\vec{q}_D$ et $\vec{q}_p$ définis respectivement par (83) et (85) sur chacun des axes et en tenant compte de (96). Les résultats sont rassemblés dans le tableau V.

TABLEAU V

Les différentes fonctions de $\vec{q}_p$ intervenant dans ce raccordement ont, dans la zone de raccord, le comportement suivant :

$$(99)\quad \begin{cases} \lim_D f_{P,1} \equiv u(y,0)\ ;\ \lim_D g_{P,1} \equiv \xi^{5/2}\, g_o(y,0)\ ;\ \lim_D h_{P,1} \equiv O(\xi^{7/2},y,0) \\ \lim_D f_{P,2} \equiv \xi^{3/2}\, f_o(y,0)\ ;\ \lim_D g_{P,2} \equiv \xi^{3}\, g_1(y,0)\ ; \\ \lim_D h_{P,2} \equiv O(\xi^{q_2},y,0) \end{cases}$$

Nous observons que le principe de raccordement "distal-proximal" nous a donné le comportement des premières fonctions de $\vec{q}_p$ dans la zone de raccord ainsi que la forme des puissances de ε intervenant dans $\vec{q}_P$. En revanche il laisse α indéterminé.

Principe de raccordement en "extérieur-intérieur".

Il est toujours appliqué entre les développements (83) et (85) mais cette fois en utilisant les passages à la limite (92) et (93) et en tenant compte de (98). Ce raccordement montre que $\alpha = \frac{2}{5}$ ou bien $\alpha = \frac{2}{7}$ auquel cas α est déterminé. En outre on obtient trois cas pour lesquels α est indéterminé ce sont ; $\frac{2}{5} < \alpha < 1$; $\frac{2}{7} < \alpha < \frac{1}{3}$; $0 < \alpha < \frac{2}{7}$. Nous donnons dans le tableau VI le schéma de ce raccordement pour $\alpha = \frac{2}{5}$.

TABLEAU VI

Nous donnerons ultérieurement le comportement, dans cette zone de raccord, des différentes fonctions intervenant dans $\vec{q}_P$.

Ainsi, l'application du principe de raccordement a imposé des contraintes sur α mais néanmoins il reste une certaine indétermination. Il faut donc maintenant choisir entre ces valeurs possibles de α.

5.7. Détermination de $\vec{q}_P$ au premier ordre.

Il s'agit d'abord de déterminer α. Pour cela on prend le développement proximal $\vec{q}_P$ déterminé pour $\alpha = \frac{2}{5}$ qu'on substitue dans les équations du mouvement (51) et (52) réécrites en variables (ξ,y,θ). Puis on refait le même travail pour $\alpha = \frac{2}{7}$. On constate alors que le système d'équations aux dérivées partielles obtenu pour $\alpha = \frac{2}{5}$ est moins dégénéré que celui obtenu pour $\alpha = \frac{2}{7}$.

En procédant toujours de la même façon pour les trois cas où α est indéterminé, on montre rigoureusement que si $\frac{2}{5} < \alpha < 1$ les équations du mouvement compte-tenu des conditions aux limites portant sur $g_{P,1}$ et $h_{P,1}$ mènent à une impossibilité. Pour les deux autres cas, les équations du mouvement sont plus dégénérées que celles obtenues pour $\alpha = \frac{2}{5}$. De l'application du principe de moindre dégénérescence il découle que <u>seul le cas</u> $\boxed{\alpha = \frac{2}{5}}$ <u>doit être retenu</u>.

Le champ proximal des vitesses s'écrit donc :

$$(100)\quad \vec{q}_P = \Big[\varepsilon^{\circ}\, f_{P,1}(\xi,y,\theta) + \varepsilon^{3/5}\, f_{P,2}(\xi,y,\theta) + \dots\ ;$$

$$\varepsilon\, g_{P,1}(\xi,y,\theta) + \dots\ ;\ \varepsilon\, h_{P,1}(\xi,y,\theta) + \varepsilon^{7/5}\, h_{P,2}(\xi,y,\theta) + \dots\Big]$$

En plus des comportements (99), les fonctions intervenant dans (100) doivent avoir dans la zone de raccord "extérieur-intérieur" les comportements

$$(101)\quad \begin{cases} \lim_E f_{P,1} \equiv 1\ ;\ \lim_E g_{P,1} \equiv -y^{-2}\cos\theta + c_1\ \xi^{5/2}\, y^{-1}\ ; \\ \qquad\qquad \lim_E h_{P,2} \equiv \xi^{7/2}\, d_1 \sin\theta \\ \lim_E f_{P,2} \equiv \xi^{3/2}\, y^{\circ}\, b_1\ ;\ \lim_E h_{P,1} \equiv -y^{-2}\sin\theta \end{cases}$$

Il est maintenant possible de déterminer le premier ordre du champ proximal.

(102) $\vec{q}_P = (f_{P,1}(\xi,y,\theta) + O(\varepsilon^{3/5}) \; ; \; 0 + O(\varepsilon) \; ; \; 0 + O(\varepsilon))$

qui, d'après les équations du mouvement, est solution du problème aux limites

(103)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[1-\mu^2 \; f_{P,1}^2(\xi,y,\theta)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \; f_{P,1}(\xi,y,\theta) \right\} = 0 \\ \\ \lim\limits_{\substack{y,\theta \text{ fixés} \\ \xi \to 0}} f_{P,1}(\xi,y,\theta) = u(y,\theta) \qquad ; \quad \lim\limits_{\substack{y \to \infty \\ \xi \to 0}} f_{P,1} = 1 \end{cases}$$

il est facile de montrer que ce problème admet une solution et une seule :

(104) $f_{P,1}(\xi,y,\theta) = u(y,\theta) \qquad \forall\, \xi,y,\theta$

Ainsi, le premier ordre de $\vec{q}_P$ est déterminé d'une manière unique. Finalement le champ proximal s'écrit

(105)
$$\boxed{\vec{q}_P = \left[\varepsilon^0 \; u(y,\theta) + \varepsilon^{3/5} \; f_{P,2}(\xi,y,\theta) + \ldots \; ; \; \varepsilon \; g_{P,1}(\xi,y,\theta) + \ldots \; ; \; \varepsilon \; h_{P,1}(\xi,y,\theta) + \ldots\right]}$$

les fonctions $f_{P,2}$, $g_{P,2}$ et $h_{P,2}$ devant satisfaire un système de 3 équations aux dérivées partielles et aux conditions aux limites (99) et (101).

Arrivé à ce stade, nous connaissons dans leurs premiers termes

1) $\vec{q}_{D,E}$ par son potentiel des vitesses (68).

2) $\vec{q}_{D,I}$ qui sont les premiers termes du développement intérieur du pseudo-révolution (cf. (96)).

3) $\vec{q}_P$ par la relation (105).

La figure 6 propose, pour fixer les idées, une représentation imagée de l'écoulement pour les différentes régions où sont valables les développements asymptotiques du champ des vitesses.

Figure 6

Puisque nous avons déterminé α, nous pouvons évaluer la frontière au-delà et en aval de laquelle commence la perturbation singulière due à la portance. En effet, dans cette perturbation singulière, $\xi = O(1)$ si bien que la zone où $\vec{q}_P$ est valable est déterminée par $x \geq \varepsilon^{2/5}$. La région de validité de $\vec{q}_D$ est donc en $\varepsilon^{-2/5}$.

Nous avons, lors de l'étude des écoulements tridimensionnels quelconques, mis en évidence une contradiction (cf. paragraphe 3.7.) provenant de l'incompatibilité du raccordement en vitesse et en tourbillon. Il est donc nécessaire de prouver que cette contradiction n'a pas lieu pour les écoulements faiblement portants. A cet égard, si nous calculons le comportement de $\vec{q}_P$ défini par (105) dans la zone de raccord nous avons :

$$(106) \qquad \lim_E \vec{q}_P = \left[1 + b_1\, x^{-3/2}\, y^{o} + \ldots\ ;\ c_1\, x^{-5/2}\, y^{-1} + \ldots\ ;\right.$$

$$\left. d_1\, x^{-7/2}\, y^{o} \sin\theta + \ldots\right] + O(\varepsilon)$$

On observe sur (106) que le terme dominant dans la zone de raccord "extérieur-intérieur" est celui d'un écoulement de pseudo-révolution. Or, pour de tels écoulements, nous avons montré en 4.3. que l'incompatibilité était levée. Il va de là que les écoulements faiblement portants ne présentent plus la dite contradiction.

5.8. Expression de la portance.

Nous allons calculer la portance par un processus analogue à celui du paragraphe 3.3. et les notations seront les mêmes. Nous connaissons $\vec{q}_E$ et $\vec{q}_I$ d'après le paragraphe précédent. On travaillera en partie principale relativement à ε et suffisamment loin vers l'aval pour être dans la perturbation

singulière de portance. En appelant ϱ la masse spécifique, on trouve :

$$(107) \qquad -P \sim \varepsilon \pi + \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} u(y,\theta)\, \rho(0,y,\theta) \left[g_{p,1}(0,y,\theta) \cos\theta - h_{p,1}(0,y,\theta) \sin\theta \right] y\, dy\, d\theta = O(\varepsilon)$$

la convergence de cette intégrale pour y tendant vers l'infini est assurée par les comportements (72).

Nous vérifions, a posteriori, que les écoulements de pseudo-révolution perturbés tridimensionnellement, étudiés depuis le paragraphe 5, sont effectivement faiblement portants, d'où leur nom. Nous remarquons également que le paramètre formel ε a une signification physique précise puisque lié à la conservation de la quantité de mouvement transversale.

Dans le cas particulier, où l'écoulement de base est un écoulement de révolution tel que nous les avons étudiés en [39], le paramètre ε, qui mesure en quelque sorte la dissymétrie de l'écoulement, devient fonction de l'angle d'incidence χ. Bien entendu, cette fonction $\varepsilon(\chi)$ n'est pas connue car elle dépend de l'écoulement global, il faudrait donc avoir résolu le problème non plus asymptotiquement, mais partout ! Néanmoins, on sait tout de même que si χ tend vers zéro alors ε tend aussi vers zéro. Dès lors, si pour $\varepsilon(\chi)$, nous admettons une loi linéaire au premier ordre,

$$(108) \qquad \varepsilon = A\chi + \ldots , \quad A \neq 0$$

Nous retrouvons la loi de variation de la portance avec l'angle d'incidence classique pour les corps élancés en subsonique et en supersonique, et trouvée plus récemment en transsonique par A.J. MESSITER [28].

Nous remarquerons, pour terminer, que si $\varepsilon = 0$, alors il n'y a évidemment plus besoin du développement proximal $\vec{q}_p$, puisqu'il n'y a plus de couche-limite de portance, et $\vec{q}_D = \vec{q}^{(0)}$ est valable partout. Enfin, dans le cas $\varepsilon \neq 0$, pourvu que l'on ne se place pas trop loin, plus précisément pour $x < O(\varepsilon^{-2/5})$, c'est le développement distal $\vec{q}_D$ qui est valable. Or, ce développement distal est constitué lui-même des deux développements $\vec{q}_{D,E}$ et $\vec{q}_{D,I}$ qui sont du type étudié dans le cas tridimensionnel quelconque. Si le développement distal de la théorie linéarisée ne présente plus la contradiction des écoulements tridimensionnels quelconques c'est que le raccordement de $\vec{q}_{D,E}$ et $\vec{q}_{D,I}$ s'effectue hors de la perturbation singulière due à ε, contrairement au schéma à deux développements des écoulements tridimensionnels quelconques de la première partie de cet article. Du point de vue pratique, si l'on s'éloigne vers l'infini, c'est le développement distal $\vec{q}_D$ qu'on rencontrera en premier. Aussi, il est permis de penser que lors d'une expérience en soufflerie, c'est le développement distal $\vec{q}_D$ qui serait observé, le développement $\vec{q}_p$ se trouvant trop loin c'est-à-dire hors de l'enceinte de la soufflerie.

6. Tableaux et figures concernant cette première partie.

AMONT DU CHOC	AVAL DU CHOC
$\zeta = 7^{-1} (12t - 5)\, t^{-\frac{2}{7}}$	$\zeta = 7^{-1}\, a_2^{\frac{3}{7}} (12t + 5)\, t^{-\frac{2}{7}}$
$f = 2^5\, 7^{-3} (12t^2 - 15t - 25)\, t^{\frac{1}{7}}$	$f_o = 2^5 . 7^{-3} . a_2^{\frac{9}{7}} (12t^2+15t-25)\, t^{\frac{1}{7}}$
$t^- = 2^{-2} . 3^{-1} (12 + 7\sqrt{3})$	$t^+ = 2^{-2} . 3^{-1} (7\sqrt{3} - 2)$
	$a_2^{\frac{3}{7}} = (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{7}}$
$f(t^-) = f^- = 2^{\frac{19}{7}} . 3^{-\frac{6}{7}} . 7^2 (\sqrt{3}-3)(12+7\sqrt{3})^{\frac{1}{7}}$	$f_o(t^+) = f_o^+ = f^-$
$f_o'^- = 2^{\frac{15}{7}} . 3^{-\frac{3}{7}} . 7^{-2} (7\sqrt{3}+2)(7\sqrt{3}+12)^{\frac{3}{7}}$	$f_o'^+ = 2^{\frac{15}{7}} . 3^{-\frac{3}{7}} . 7^{-2}\, (2-\sqrt{3})^{\frac{2}{7}}$

$$\zeta_c = 2 . 3^{\frac{1}{7}} (\sqrt{3} - 1)^{\frac{1}{7}}$$

$$f_o'^+ + f_o'^- = \frac{32}{49}\, \zeta_c^2$$

$$f_o''^+ + f_o''^- = \frac{64}{69}\, \zeta_c$$

TABLEAU I

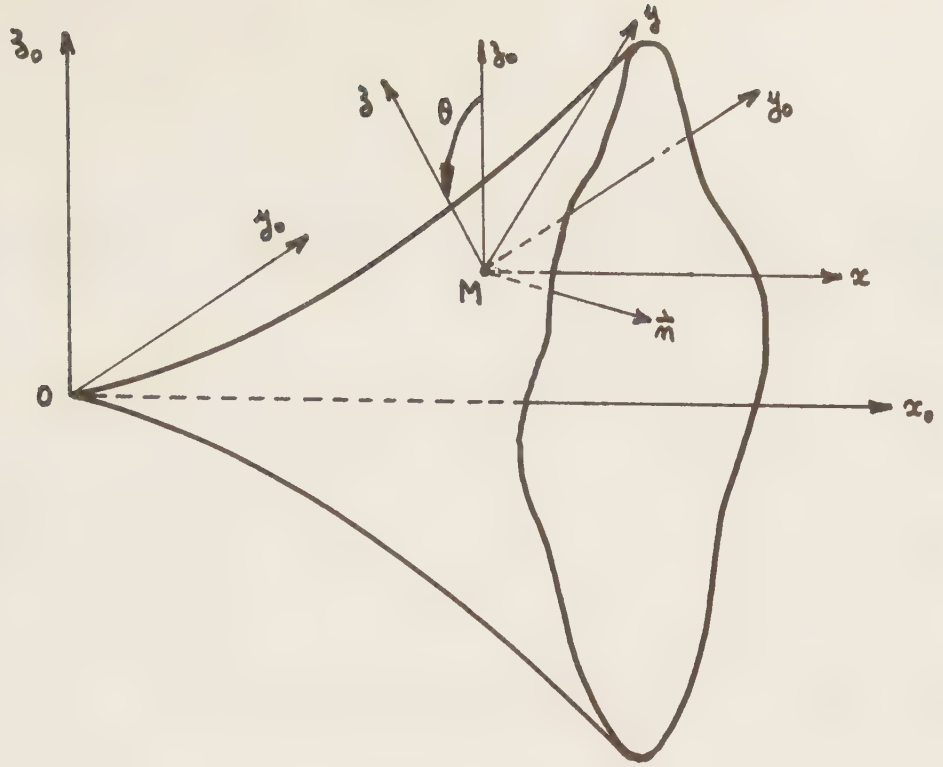
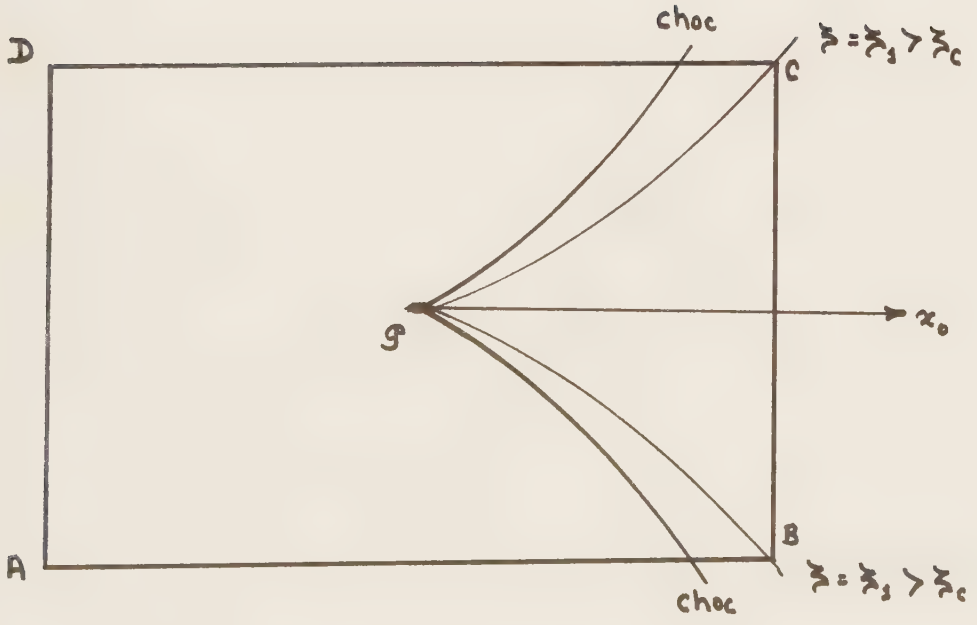


Figure 1



(b) Coupe par un plan $\theta = Cte$

Figure 2

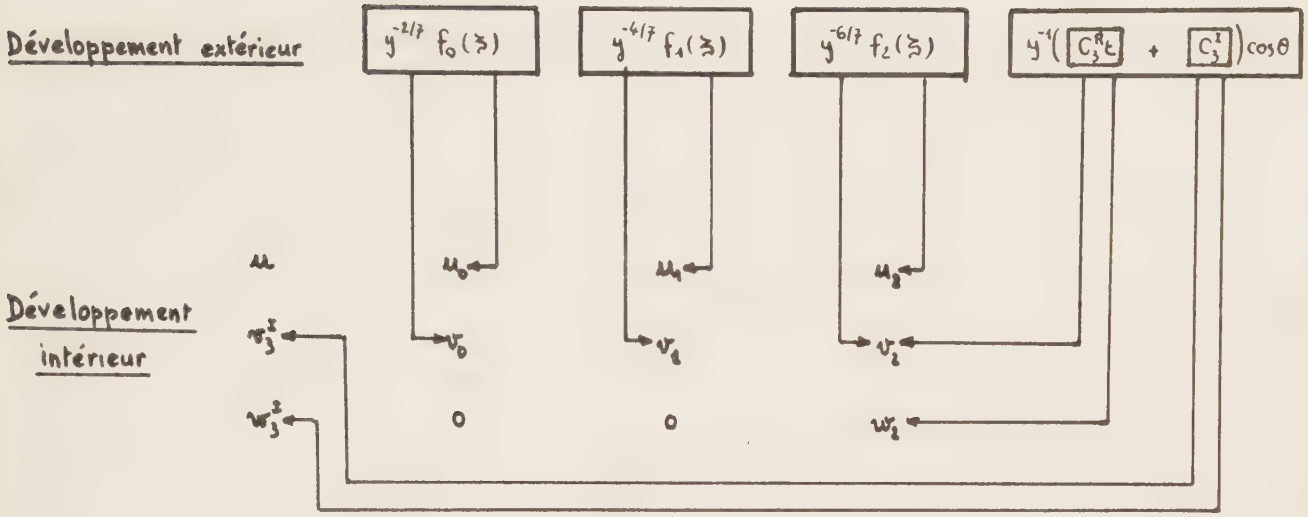


Tableau II

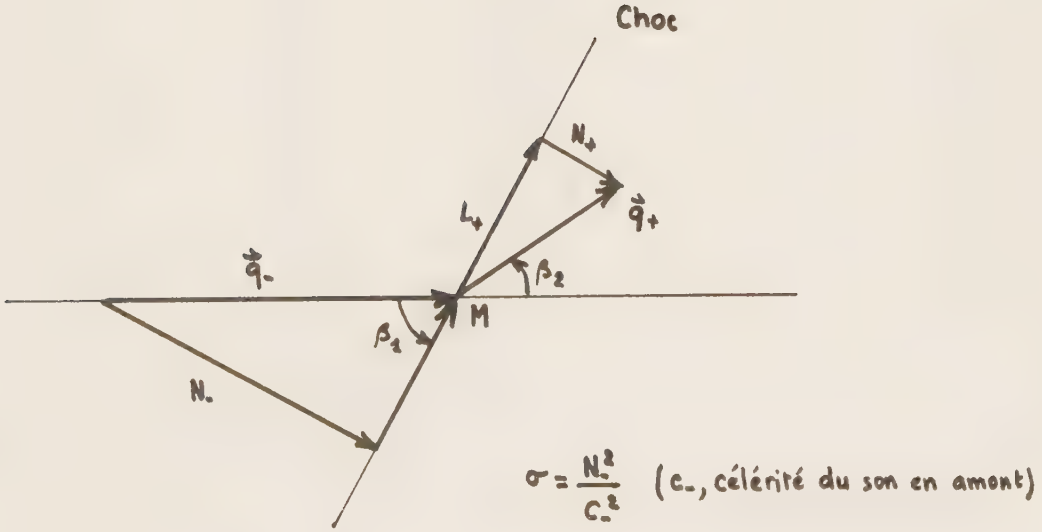


Figure 3

$r = \frac{25}{7}$; $q-p \leq \frac{9}{7}$; $\frac{25}{7} < q \leq \frac{37}{7}$

$q-p \neq \frac{9}{7}$	$p = \frac{20}{7}$ et $q = \frac{29}{7}$
H= C ; G = B sin θ ; U indéterminée	H = C ; U et G telles que $(\frac{2}{7} f_o + \frac{4}{7} \zeta f_o') U + G = B \sin \theta$
$\lim_{\zeta \to \zeta_c} U(\zeta_{choc}, \theta) = A \sin \theta \; y^{-\frac{2}{7} s} + \ldots$; $s = (0,1,\ldots,8)$	$\lim_{\zeta \to \zeta_c} U(\zeta_{choc}, \theta) = A \sin \theta \; y^{-\frac{2}{7} \alpha} + \ldots$; $\alpha = (5,6,\ldots,10)$; $\lim_{\zeta \to \zeta_c} U(\zeta_{choc}, \theta) = B \sin \theta \; y^{\circ} + \ldots$
y étant la coordonnée radiale d'un point du choc, liée à $\zeta_{choc} - \zeta_c$ par (10)	
cas II	cas I

TABLEAU III

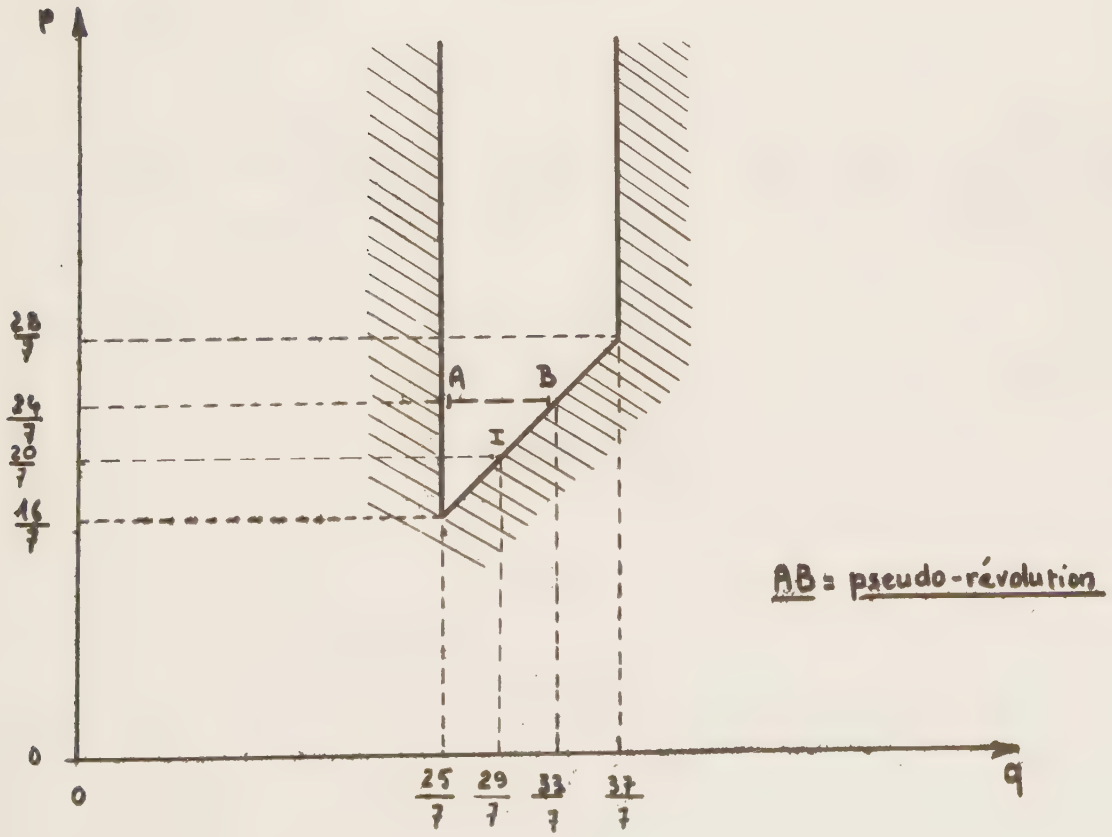


Figure 4

$$(a)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\tilde{q}_y^{(1)} - \frac{2\mu^2}{(\gamma-1)}\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}-1}(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})\,\tilde{q}_y^{(0)} +\right.$$

$$+\frac{1}{y}\left\{\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\tilde{q}_y^{(1)} - \frac{2\mu^2}{(\gamma-1)}\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}-1}(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})\tilde{q}_y^{(0)}\right\} +$$

$$+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\tilde{q}_\theta^{(1)} - \frac{2\mu^2}{(\gamma-1)}\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}-1}(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})\,\tilde{q}_\theta^{(0)}\right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\tilde{q}_x^{(1)} - \frac{2\mu^2}{(\gamma-1)}\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}-1}(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})\tilde{q}_x^{(0)}\right\} = 0$$

$$(b)\quad \frac{2\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})}{\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^2 y}\left(R_x^{(0)}\tilde{q}_y^{(0)} - R_y^{(0)}\tilde{q}_x^{(0)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{2\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})}{\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(R_x^{(0)}\tilde{q}_y^{(0)} - R_y^{(0)}\tilde{q}_x^{(0)}\right)\right\} - \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{2\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})}{\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]}\left(R_\theta^{(0)}\tilde{q}_x^{(0)} - R_x^{(0)}\tilde{q}_\theta^{(0)}\right)\right\} +$$

$$+\frac{A_\theta}{y} + \frac{\partial A_\theta}{\partial y} - \frac{1}{y}\frac{\partial A_y}{\partial\theta} = 0\ .$$

$$(c)\quad \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{2\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})}{\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^2}\left(R_y^{(0)}\tilde{q}_\theta^{(0)} - R_\theta^{(0)}\tilde{q}_y^{(0)}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})}{\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(R_x^{(0)}\tilde{q}_y^{(0)} - R_y^{(0)}\tilde{q}_x^{(0)}\right)\right\} + \frac{1}{y}\frac{\partial A_x}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial x} = 0\ .$$

TABLEAU IV

$$(d)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})}{\left[1-\mu^2(\tilde{q}^{(0)})^2\right]^2}\left(R_\theta^{(0)}\,\tilde{q}_x^{(0)}-R_x^{(0)}\,\tilde{q}_\theta^{(0)}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{2\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)}\cdot\vec{\tilde{q}}^{(1)})}{\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(R_y^{(0)}\,\tilde{q}_\theta^{(0)}-R_\theta^{(0)}\,\tilde{q}_y^{(0)}\right)\right\}+\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=0$$

avec

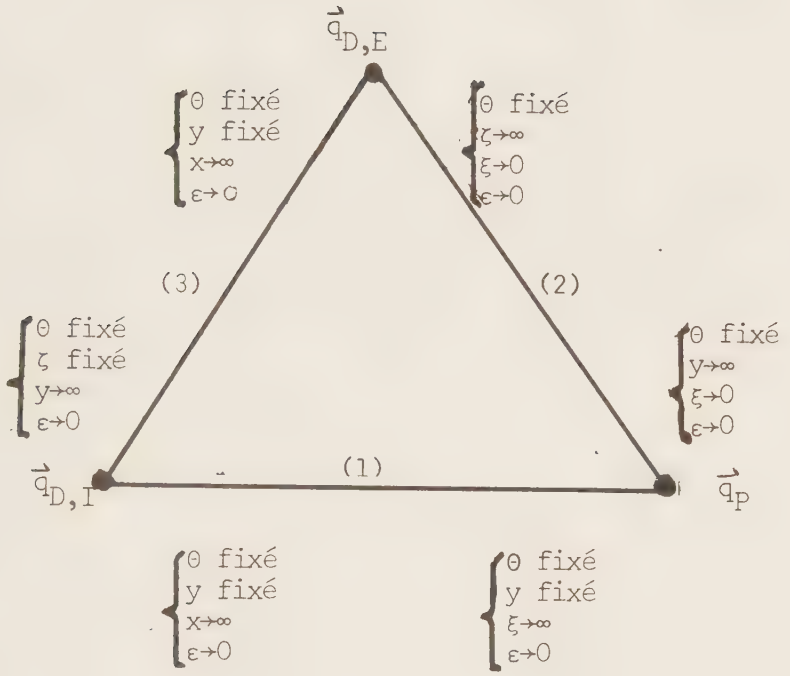
$$(e)\quad R_x^{(i)}\equiv\frac{\tilde{q}_\theta^{(i)}}{y}+\frac{\partial\tilde{q}_\theta^{(i)}}{\partial y}-\frac{1}{y}\,\frac{\partial\tilde{q}_y^{(i)}}{\partial\theta}\;;\quad R_y^{(i)}\equiv\frac{1}{y}\,\frac{\partial\tilde{q}_x^{(i)}}{\partial\theta}-\frac{\partial\tilde{q}_\theta^{(i)}}{\partial x}\;;$$

$$R_\theta^{(i)}\equiv\frac{\partial\tilde{q}_y^{(i)}}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{q}_x^{(i)}}{\partial y}\quad;\quad i=(0,1)$$

$$(f)\quad\begin{cases}A_x\equiv\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{-1}\left(R_y^{(1)}\,\tilde{q}_\theta^{(0)}-R_\theta^{(1)}\,\tilde{q}_y^{(0)}+R_y^{(0)}\,\tilde{q}_\theta^{(1)}-R_\theta^{(0)}\,\tilde{q}_y^{(1)}\right)\\ A_y\equiv\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{-1}\left(R_\theta^{(1)}\,\tilde{q}_x^{(0)}-R_x^{(1)}\,\tilde{q}_\theta^{(0)}+R_\theta^{(0)}\,\tilde{q}_x^{(1)}-R_x^{(0)}\,\tilde{q}_\theta^{(1)}\right)\\ A_\theta\equiv\left[1-\mu^2(\vec{\tilde{q}}^{(0)})^2\right]^{-1}\left(R_x^{(1)}\,\tilde{q}_y^{(0)}-R_y^{(1)}\,\tilde{q}_x^{(0)}+R_x^{(0)}\,\tilde{q}_y^{(1)}-R_y^{(0)}\,\tilde{q}_x^{(1)}\right)\end{cases}.$$

$$(g)\quad\vec{\tilde{q}}^{(i)}\equiv(\tilde{q}_x^{(i)},\tilde{q}_y^{(i)},\tilde{q}_\theta^{(i)})\;;\quad i=(0,1)\;.$$

TABLEAU IV (suite)

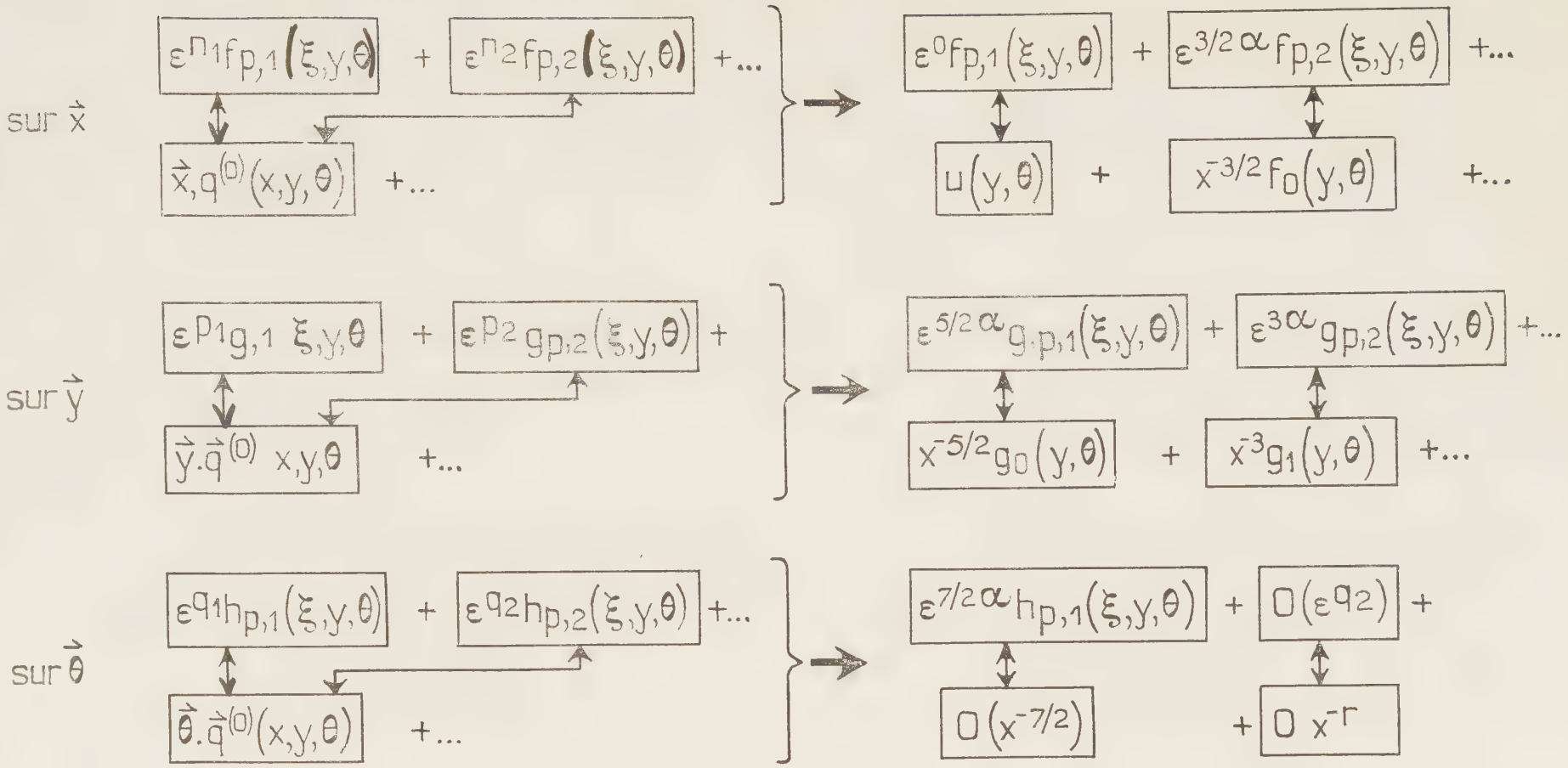


(1) raccordement "distal-proximal" : série double en ε et x

(2) raccordement "extérieur-intérieur" : série triple en ε, x et y

(3) au premier ordre raccordement classique du pseudo-révolution

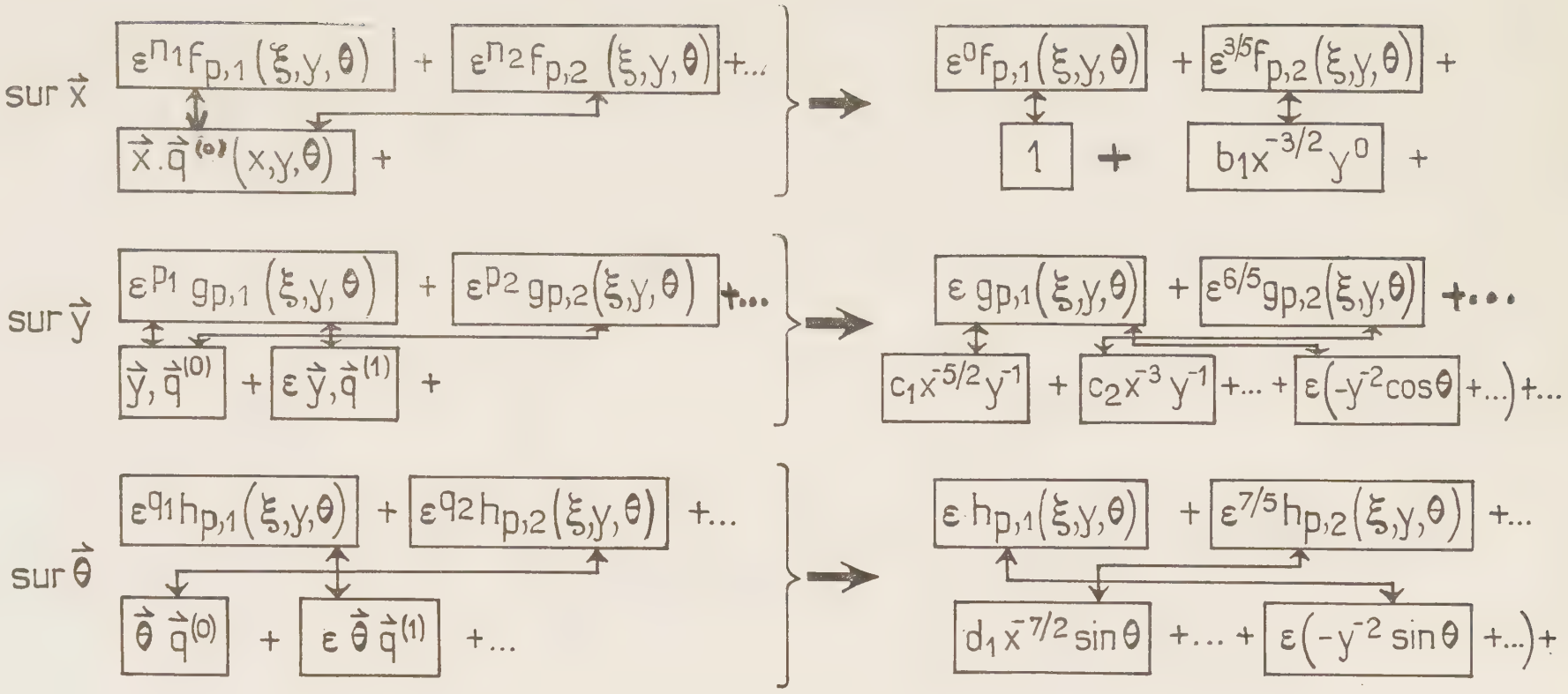
Figure 5



$q_2 > 7/2\,\alpha$ et $r > 7/2$

$\vec{x},\vec{y}$,et $\vec{\theta}$ sont les vecteurs unitaires des axes x,y et θ

Tableau V



$$\alpha = \frac{2}{5}$$

Tableau VI

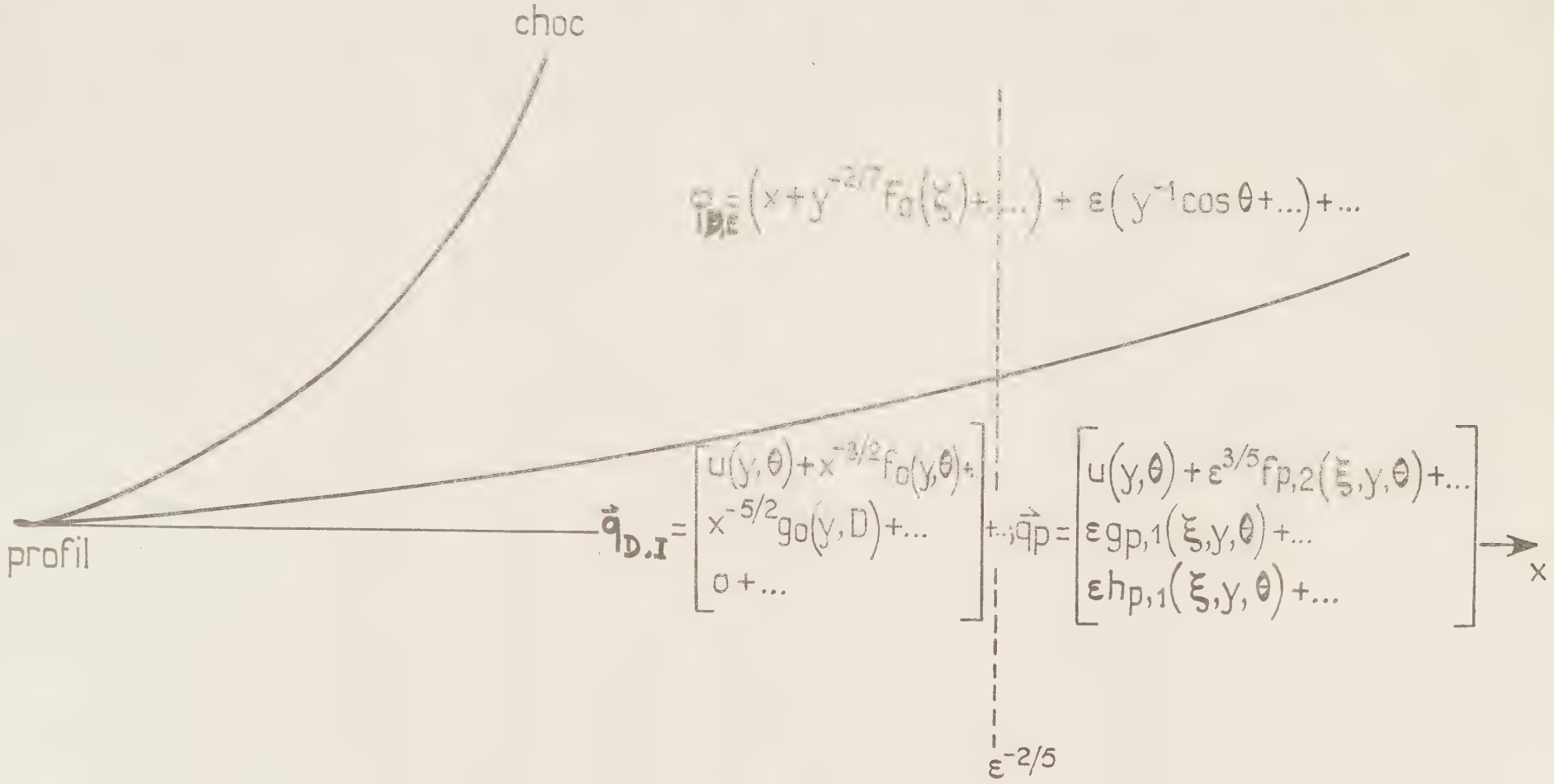

choc
$\vec{q}_{D.E} = \left(x + y^{-2/7} f_0(\xi) + \ldots\right) + \varepsilon\left(y^{-1}\cos\theta + \ldots\right) + \ldots$
profil
$\vec{q}_{D.I} = \begin{bmatrix} u(y,\theta) + x^{-3/2} f_0(y,\theta) + \ldots \\ x^{-5/2} g_0(y,D) + \ldots \\ 0 + \ldots \end{bmatrix}$
$+ \ldots + \vec{q}_P = \begin{bmatrix} u(y,\theta) + \varepsilon^{3/5} f_{p,2}(\xi,y,\theta) + \ldots \\ \varepsilon g_{p,1}(\xi,y,\theta) + \ldots \\ \varepsilon h_{p,1}(\xi,y,\theta) + \ldots \end{bmatrix}$
x
$\varepsilon^{-2/5}$

Figure 6

DEUXIEME PARTIE

ELABORATION D'UNE METHODE NUMERIQUE POUR LA RESOLUTION DE CERTAINS PROBLEMES MIXTES NON-LINEAIRES, AVEC APPLICATION AU CALCUL DE L'ECOULEMENT SONIQUE AUTOUR D'UN PROFIL D'AILE DONNE

1. Introduction.

Un certain nombre de problèmes d'aérodynamique font intervenir des équations de type mixte, c'est-à-dire elliptiques et hyperboliques. Citons pour mémoire:

a) l'écoulement au col d'une tuyère, qu'il est nécessaire de connaître pour calculer le divergent supersonique ;

b) le problème de l'onde de choc détachée qui conditionne la rentrée des engins dans l'atmosphère ;

c) le problème de la zone locale supersonique, si important pour les avions type Airbus, les avions de combat, les pales d'hélicoptères.

Figure 7

Les trois exemples précédents présentent trois difficultés essentielles :

i) Les équations sont de type mixte ; or, les schémas numériques sont très différents en elliptique et en hyperbolique.

ii) Les équations sont non-linéaires, il s'ensuit d'ailleurs que la ligne de changement de type est inconnue a priori.

iii) En aérodynamique externe (c'est le cas des exemples b) et c)) le domaine de calcul n'est pas borné : il faut écrire les conditions à l'infini avec le plus grand soin. Ceci nécessite une étude précise du point à l'infini.

Pour une classe de problèmes mixtes linéaires, l'analyse fonctionnelle fournit des théorèmes d'existence, d'unicité et de régularité. Dans son article de 1958, FRIEDRICHS introduit un formalisme permettant de prendre en compte des équations aux dérivées partielles linéaires de différents types : elliptique, parabolique et hyperbolique. Le but de FRIEDRICHS est en fait d'étudier des problèmes qui changent de type comme l'équation de Tricomi. On peut démontrer sous certaines conditions portant entre autres sur la positivité de l'opérateur de FRIEDRICHS, l'existence et l'unicité d'une solution forte. Du point de vue de l'analyse numérique proprement dite, les systèmes de FRIEDRICHS ont été étudiés par LASCAUX. Dans sa thèse d'état publiée à Paris en 1970, il donne et compare différentes méthodes de résolution dans le cas où l'ouvert est un parallélotope dont les côtés sont parallèles aux axes. Ainsi, pour les problèmes aux limites du type FRIEDRICHS , on se trouve bien armé sur le plan théorique et sur le plan numérique. Mais, répétons-le, tout ceci ne s'applique malheureusement qu'à une classe de problèmes linéaires dans des ouverts bornés.

Quant aux problèmes elliptiques-hyperboliques non-linéaires apparaissant dans les exemples a), b) et c), la base théorique fait actuellement défaut : les méthodes numériques disponibles à ce jour sont peu nombreuses. D'où la présente tentative d'élaboration d'une méthode numérique pour intégrer certains problèmes elliptiques-hyperboliques et non-linéaires.

2. Idées générales de la méthode.

Il s'agit d'une méthode de tir d'inspiration analogue à celle de P.I. CHUSHKIN [6].

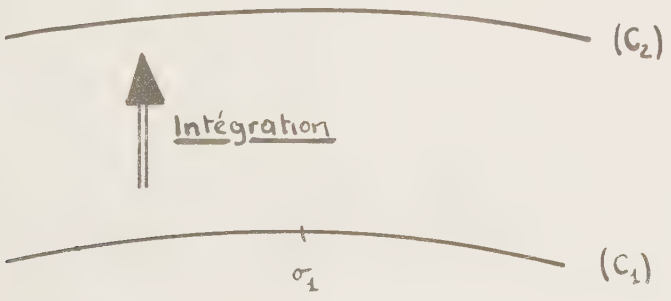
On considère un système aux dérivées partielles, quasi-linéaire, de deux équations, pour deux fonctions inconnues u et v de deux variables indépendantes x et y :

$$(109) \quad \begin{cases} A_1 u_x + B_1 u_y + C_1 v_x + D_1 v_y + E_1 = 0 \\ A_2 u_x + B_2 u_y + C_2 v_x + D_2 v_y + E_2 = 0 \end{cases}$$

A_i, B_i, C_i, D_i, E_i sont des fonctions de x, y, u et v.

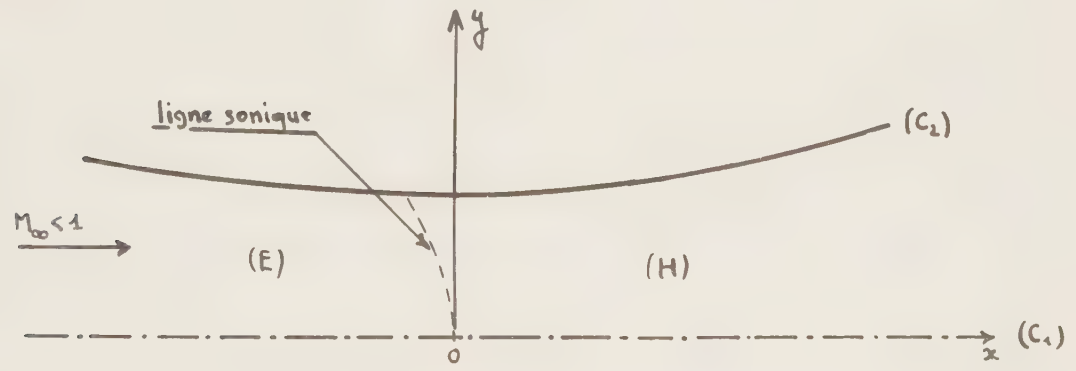
Pour les problèmes aux limites nous envisageons deux cas d'espèce.

a) Le problème peut se poser dans un domaine limité par deux courbes (C_1) et (C_2)



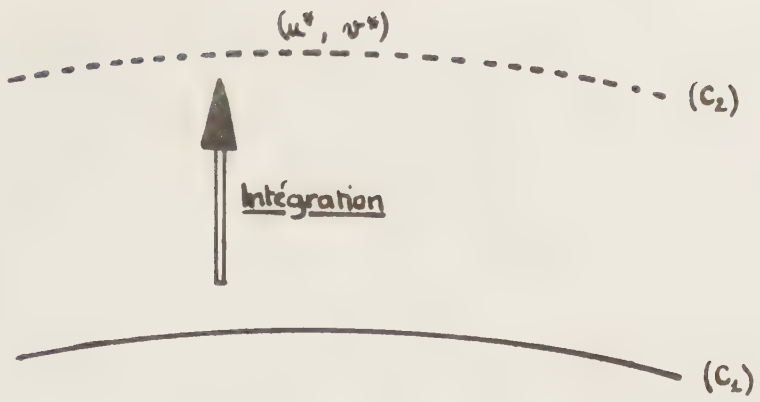
Sur chaque courbe (C_i) $(i = 1,2)$ est imposée une condition du type $f_i(u,v) = 0$. Soit σ_1 l'abscisse curviligne le long de (C_1). On définit des couples dits "admissibles" de fonctions $u_1(\sigma_1;\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$, $v_1(\sigma_1;\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ où $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ représentent p paramètres arbitraires, et qui vérifient l'identité $f_1(u_1,v_1) \equiv 0$. Les p paramètres étant choisis, les fonctions u_1 et v_1 constituent des données initiales pour un problème de Cauchy portant sur u et v. On intègre (nous reviendrons longuement sur ce problème) de (C_1) jusqu'à (C_2) ; soient u_2 et v_2 les traces de la solution trouvée sur (C_2) ; on calcule alors une certaine norme $J(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ pour la fonction $f_2(u_2,v_2)$. On recommence itérativement le calcul pour minimiser la fonction J.

Nous pouvons illustrer cette situation en prenant l'exemple de la tuyère



L'axe de symétrie représente la courbe (C_1) sur laquelle la condition $f_1(u,v) = 0$ s'écrit $v = 0$. On se donne sur (C_1) des couples admissibles du type $(u_1(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_p),0)$. La courbe (C_2) est la paroi de la tuyère, connue analytiquement par la relation $y = y_{\mathcal{P}}(x)$. La condition $f_2(u,v) = 0$ à imposer sur (C_2) est tout simplement la condition de glissement : $\frac{v}{u} = y'_{\mathcal{P}}$.

b) Comme nous l'avons vu sur les exemples b) et c) de l'introduction, le problème peut encore se poser dans un domaine semi-infini, limité seulement par la courbe (C_1).



On tronque alors le domaine selon une courbe (C_2) sur laquelle on considère cette fois, parmi tous les développements asymptotiques a priori possibles pour (u,v), celui, noté (u^*,v^*), le plus "voisin" de (u_2,v_2) et l'on minimise une certaine norme du vecteur (u_2-u^*,v_2-v^*).

Les principaux éléments de cette méthode ont été mis au point sur le cas d'un profil symétrique sans incidence à $M_\infty = 1$. Le nez du profil considéré est arrondi, ce qui a été la source de grosses difficultés, et les équations traitées sont les équations exactes. Observons qu'il s'agit d'une situation du type b).

Remarque. Le choix d'un profil symétrique n'est en rien fondamental. Il permet une simplification au niveau de la technique de programmation.

3. Le problème à résoudre.

3.1. Schéma physique.

Considérons un profil d'aile symétrique, sans incidence, plongé dans un écoulement uniforme et sonique. Le fluide considéré est un gaz parfait, à chaleurs spécifiques constantes. L'expérience en soufflerie fournit le schéma physique de l'écoulement, représenté sur la figure 8. Nous voyons apparaître trois problèmes distincts :

Le problème 1. Il est défini dans la région située en amont de la caractéristique-limite. Par définition de cette dernière, seule la partie AC du profil intervient. Le domaine de l'écoulement considéré est constitué de deux régions séparées par la ligne sonique et constituant ce qu'on appelle la "zone transsonique":

a) une large région subsonique en amont, limitée vers l'aval par la ligne sonique,

b) une étroite bande supersonique limitée en amont par la ligne sonique, et en aval par la caractéristique-limite ou frontière-transsonique, qui est la seule caractéristique allant jusqu'à l'infini.

Il n'y a pas de choc dans la zone transsonique, ce qui constitue un gros avantage par rapport à l'étude des zones locales supersoniques.

Ce problème 1 possède les trois difficultés déjà signalées

- le domaine de calcul s'étend jusqu'à l'infini, et les conditions de l'écoulement uniforme et sonique ne sauraient sans dommage être imposées que très loin,
- les équations à intégrer sont de type mixte ,
- la non-linéarité du problème joue un rôle essentiel. Par voie de conséquence la frontière aval du domaine de calcul (la frontière transsonique) est parfaitement inconnue, c'est un problème à frontière libre; de même d'ailleurs que la ligne de changement de type des équations, c'est-à-dire la ligne sonique, est elle aussi inconnue.

Le problème 2. Une fois le problème 1 résolu, en apparaît un second, cette fois entièrement hyperbolique : le prolongement de l'écoulement en aval de la frontière transsonique. Nous avons affaire à un problème hyperbolique classique dans lequel on donne la forme d'une caractéristique (la caractéristique-

limite précédemment calculée), et une donnée (la condition de glissement) sur un arc (le profil) non caractéristique. C'est un problème du 3ème type dans les problèmes bien posés pour les systèmes hyperboliques. Ce problème 2 ne présente donc aucune difficulté... dans la mesure où le problème 1 a été correctement résolu car autrement on risquerait, comme nous l'a dit en privé CHUSHKIN, une focalisation hâtive des caractéristiques. Du point de vue numérique le problème 2 se **résout** aisément grâce à la méthode des caractéristiques.

Le problème 3. Ce troisième problème concerne l'onde de choc et l'écoulement en aval de celui-ci. Il s'agit là d'un problème très difficile car il est lui aussi de type mixte. Mais, heureusement, point n'est besoin de la résoudre, car il ne met pas en cause la distribution des vitesses sur le profil, qui seule présente un intérêt pour la construction aéronautique. En effet, en fluide parfait, pour un profil à bord de fuite aigu, les ondes de choc sont issues de cette pointe arrière.

En conclusion, le problème 1 apparaît comme étant le seul problème vraiment important. C'est ce problème que nous nous sommes efforcés de résoudre.

3.2. Actualité du problème.

Le problème 1 est un problème ouvert.

• On sait construire des écoulements à $M_\infty = 1$ grâce à la méthode de l'hodographe. Le problème est alors rendu linéaire, et mixte, dans le plan hodographique, et on le traite par relaxation [16]. Mais le grave inconvénient de cette méthode est d'être une méthode inverse : elle fournit bien l'écoulement autour d'un profil, mais ce profil n'est pas connu d'avance, et ne peut donc pas être imposé a priori. De plus, la méthode de l'hodographe ne s'applique pas à un corps de révolution, à l'encontre d'une méthode directe.

• La méthode instationnaire ([27], [29]) qui transforme un problème aux limites elliptique-hyperbolique à deux variables en un problème hyperbolique bien posé à trois variables, avec conditions initiales et conditions aux limites, est aujourd'hui très utilisée en transsonique, et elle fonctionne bien. Si les conditions aux limites sont indépendantes du temps, ou le deviennent, la solution asymptotiquement obtenue quand la variable temps devient importante représente la solution de l'état stationnaire du problème aux limites initial. On peut utiliser des conditions initiales physiquement réalistes et laisser l'écoulement évoluer dans le temps comme il le ferait physiquement. Si, seul, l'état stationnaire est désiré, il n'est pas utile d'employer le temps réel mais un "pseudo-temps" pour lequel la vitesse de convergence sera accrue. Malheureusement, cette méthode est inapplicable au cas de l'écoulement à $M_\infty = 1$, car, loin du profil, le passage de $M_\infty = 1$ s'effectue de façon singulière, le schéma physique même de l'écoulement changeant de nature. De plus, il est bien connu que cette méthode exige une grande capacité en mémoire et surtout de longs temps de calcul.

• La relaxation mixte non-linéaire [31] est certainement promise à un brillant avenir. Toutefois, elle est très récente et semble avoir été surtout mise au point, jusqu'à présent, pour le problème de la zone locale supersonique, dans le cas d'un profil mince et dans le cadre des équations simplifiées du transsonique, à l'exclusion de la délicate zone incompressible située au voisinage du nez d'un profil à bord d'attaque arrondi. Jusqu'à présent, on ne possède guère de comparaisons directes entre la méthode instationnaire et la relaxation mixte non-linéaire pour un même corps, sur une même machine en utilisant un même nombre de points de maillage. Néanmoins, il semble bien que la méthode de relaxation mixte non-linéaire est de 5 à 10 fois plus rapide, (Murman dixit). En fait, d'ailleurs, elle converge en un nombre fixe d'itéra-

tions (environ 500), tandis que le nombre d'itérations nécessité par la méthode instationnaire croît avec le nombre de pas en espace.

• Dès 1957, P.I. CHUSHKIN [6] publiait des résultats concernant l'écoulement à $M_\infty = 1$ autour d'obstacles donnés (cercles ou ellipses, sphères ou ellipsoïdes), obtenus à l'aide de la méthode des relations intégrales. Ces résultats, tout à fait remarquables pour l'époque, où les Soviétiques ne disposaient que d'ordinateurs de faible capacité et très lents, constituent un modèle du genre. Mais on doit tout de même dire qu'ils relèvent d'un habile empirisme : discrétisation du champ de l'écoulement à l'aide de deux ou trois bandes seulement, écriture des conditions de l'écoulement uniforme à l'infini. Il est même tout à fait étonnant que CHUSHKIN ait pu obtenir d'aussi bons résultats avec des moyens aussi grossiers. Et, si la méthode fonctionne correctement pour des profils épais, il semble bien, comme nous l'avons nous-même constaté, ne pas en être de même pour les profils minces actuels ; il est d'ailleurs pratiquement impossible d'employer un plus grand nombre de bandes, à cause de l'instabilité, bien connue, du schéma numérique utilisé.

Nous avons retenu deux des idées essentielles de CHUSKHIN : la recherche de la distribution des vitesses sur le profil dans une famille analytique dépendant d'un petit nombre de paramètres, et la pose d'un problème de tir. Nous avons également retenu l'idée de son changement de coordonnées. Mais nous avons écrit avec grand soin les conditions externes (développement asymptotique), ainsi que les conditions aux limites sur la frontière transsonique - libre chez CHUSHKIN - imposée chez nous dans une famille analytique. De plus, nous avons contrôlé continuellement nos résultats par comparaison avec les résultats expérimentaux très fins obtenus à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, sur profil NACA 0012 de l'O.N.E.R.A.. Et surtout, nous avons dissocié complètement la famille de distributions de vitesses sur le profil et le mode de dis-

crétisation retenu pour les équations aux dérivées partielles, qui sont confondus intrinsèquement, dans la méthode des relations intégrales, en une seule "formule d'interpolation". Nous obtenons ainsi une souplesse beaucoup plus grande, parfaitement adaptée aux énormes changements d'ordres de grandeur apparaissant entre le nez d'un profil moderne (i.e: de très faible rayon de courbure) et les régions éloignées du bord d'attaque. Nous utilisons un véritable schéma aux différences finies, dont nous avons étudié méthodiquement la stabilité et la précision par voies théorique et numérique.

• Récemment, S.B. BERNDT et Y. SEDIN [2] ont développé une méthode basée sur la théorie des corps de révolution élancés, et applicable au cas $M_\infty = 1$. Il s'agit d'une méthode itérative très intéressante, utilisant le développement asymptotique à l'infini de RANDALL, et qui présente des analogies avec notre méthode. Mais il faut toutefois préciser que l'approximation retenue des équations suppose que l'on écarte le délicat problème des forts gradients au voisinage au bord d'attaque, problème qui nous a causé beaucoup de difficultés. La méthode que nous présentons s'applique, elle, aux équations complètes de l'écoulement stationnaire compressible d'un fluide non dissipatif.

3.3. Méthode de résolution.

Nous allons préciser dans le cas du problème 1 énoncé en 3.1., les grandes lignes de la méthode formulées au paragraphe 2.

Notre méthode est une méthode de tir d'inspiration analogue à celle de CHUSHKIN. Les inconnues essentielles sont

a) la distribution des vitesses sur le profil,

b) la forme de la caractéristique-limite.

Ces deux fonctions sont cherchées dans deux familles dépendant d'un petit nombre de paramètres λ_i $(i = 1,n)$ pour a) et p_j $(j = 1,r)$ pour b).

Un prédicteur pour ces paramètres étant fixé, la distribution des vitesses jointe à la distribution des pentes du profil (connu par hypothèse) constituent les conditions initiales, tandis que la forme de la caractéristique-limite et la condition de symétrie sur l'axe des x jouent le rôle de conditions aux limites. L'intégration s'effectue du profil vers l'infini. Il s'agit classiquement d'un problème mal posé sur lequel nous reviendrons longuement. On vise, non pas l'écoulement uniforme comme le faisait CHUSHKIN mais, selon une idée de P. GERMAIN [18], un développement asymptotique. L'intégration profil infini étant considérée comme terminée, on détermine les coefficients intervenant dans le développement asymptotique. A une certaine distance du profil on définit une distance J entre le champ des vitesses obtenu numériquement , et le champ des vitesses donné par le développement asymptotique. Le problème est ramené à un problème de minimisation :

$$\min_{\lambda_i, p_j} \quad J(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \; ; \; p_1, \ldots, p_r)$$

Les différentes étapes évoquées dans cette méthode de résolution vont maintenant être étudiées systématiquement.

4. Rappels sur les développements asymptotiques à l'infini.

4.1. Cas général d'un profil asymétrique.

4.1.1. Développement asymptotique du potentiel des vitesses.

Le profil est plongé dans un écoulement de gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, dénué d'effets dissipatifs. On introduit un repère orthonormé direct $(\Omega;\bar{x},\bar{y})$, dont l'axe $\Omega\,\bar{x}$ est choisi parallèle à l'écoulement non perturbé. A l'infini amont, le fluide a une vitesse prise égale à l'unité. On peut introduire un potentiel des vitesses de perturbation φ^P dont la partie principale $\tilde{\varphi}^P$ satisfait l'équation

$$(110) \qquad -(\gamma+1)\ \tilde{\varphi}^P_{\bar{x}}\ \tilde{\varphi}^P_{\bar{x}\bar{x}} + \tilde{\varphi}^P_{\bar{y}\bar{y}} = 0$$

γ étant l'indice adiabatique du gaz.

FRANKL' [14] et GUDERLEY [20] ont montré que $\tilde{\varphi}^P$ peut s'écrire sous la forme d'une solution homogène:

$$(111) \qquad \tilde{\varphi}^P = (\bar{y})^{2/5}\ f(\bar{\zeta}) \quad (a) \qquad , \qquad \bar{\zeta} = (\gamma+1)^{-1/3}\ \bar{x}(\bar{y})^{-4/5} \quad (b)$$

A l'ordre de la solution homogène, les lignes remarquables : lignes soniques, caractéristiques-limites, etc... sont des lignes ζ = cte.

En amont des chocs, FRANKL' a fourni [26] pour la fonction $f(\bar{\zeta})$, le paramétrage suivant :

$$(112) \qquad \bar{\zeta} = 2^{-1}\ a_1^{1/5}(\bar{s})^{-2/5}\ (2\bar{s}-1) \quad (a) \qquad , \quad f = 6^{-1}\ a_1^{3/5}(\bar{s})^{-1/5}\left[2(\bar{s})^2-3\bar{s}+6\right] \quad (b)$$

a_1 représentant une constante arbitraire, homogène à une longueur.

Depuis les travaux de D. EUVRARD [10] on sait que le potentiel des vitesses, pour $\bar{y}$ grand, peut s'écrire sous la forme :

$$(113) \qquad \varphi = \bar{x}(\bar{y})^{2/5}\ f(\bar{\zeta})+\bar{y}^{\circ}\ f^{*}(\bar{\zeta})+(\bar{y})^{-1/5}\ f^{**}(\bar{\zeta})+(\bar{y})^{-2/5}\ f^{***}(\bar{\zeta})+(\bar{y})^{-3/5}\ f^{****}(\bar{\zeta})+$$

$$+ O((\bar{y})^{-4/5})$$

avec :

$$(114) \quad \begin{cases} f^{*} = \dfrac{a_1(\gamma+1)^{-1/3}}{60}\left\{6\gamma\left[-2(\bar{s})^3+5(\bar{s})^2-5\bar{s}\right]+5\left[-2(\bar{s})^3+5(\bar{s})^2+3(\bar{s})\right]\right\}, & (a) \\ f^{**} = C_{-1/5}(\bar{s})^{3/5} \\ f^{***} = \dfrac{a_1^{7/5}}{10080}(\gamma+1)^{-2/3}(\bar{s})^{1/5}\left[3(\bar{s})+1\right]^{-1}\left[\bar{A}(\bar{s})\gamma^2+\bar{B}(\bar{s})\gamma+\bar{C}(\bar{s})\right]+C_{-2/5}(\bar{s})^{1/5}(\bar{s}-1) \end{cases}$$

$$(114)\quad \left\{\begin{array}{l} \bar{A}(\bar{s}) = 180\left[24(\bar{s})^5-76(\bar{s})^4+98(\bar{s})^3-63(\bar{s})^2+28(\bar{s})\right] \\ \bar{B}(\bar{s}) = 28\left[264(\bar{s})^5-836(\bar{s})^4+817(\bar{s})^3-390(\bar{s})^2-180(\bar{s})\right] \\ \bar{C}(\bar{s}) = 5\left[624(\bar{s})^5-1976(\bar{s})^4+1400(\bar{s})^3+651(\bar{s})^2\right] \\ f^{****} = \dfrac{(\gamma+1)^{-1/3}}{4}\, a_1^{2/5}\, C_{-1/5}(\bar{s})^{4/5}(3\bar{s}+1)^{-1}\left[\left(\dfrac{14}{3}\bar{s}+1\right)-6\gamma\right]+C_{-3/5}(\bar{s})^{4/5}(-2\bar{s}+1) \end{array}\right.$$

On voit apparaître dans le potentiel des vitesses φ défini par (113), (114) quatre constantes : a_1, $C_{-1/5}$, $C_{-2/5}$ et $C_{-3/5}$. Ces quatre coefficients sont inconnus ; ils ne sont calculables que par résolution du problème global et pas seulement du problème à l'infini. Néanmoins, on possède les informations suivantes :

- a_1 est lié à l'unité de longueur choisie
- $C_{-1/5}$ et $C_{-3/5}$ sont liés à la dissymétrie de l'écoulement de sorte que pour un <u>écoulement symétrique</u> on a $C_{-1/5} = 0$ et $C_{3/5} = 0$.
- $C_{-2/5}$ correspond à une translation d'origine le long de l'axe des $\bar{x}$.

Notons enfin que les composantes cartésiennes de la vitesse $u = \varphi_{\bar{x}}$, $v = \varphi_{\bar{y}}$ se déduisent immédiatement de (113), (114), et se développent de façon analogue.

Pour $\bar{y}$ voisin de 0, et $\bar{x}$ négatif et grand en valeur absolue, c'est-à-dire loin en amont du profil, le développement (113), sous sa forme initiale, n'est évidemment pas valable. Toutefois, le comportement de f^*, f^{**}, f^{***} et f^{****} pour $\bar{\zeta} \to -\infty$ est tel qu'il se produit une compensation avec $(\bar{y})^{2/5}$, $(\bar{y})^0$, $(\bar{y})^{-1/5}$, $(\bar{y})^{-2/5}$ et $(\bar{y})^{-3/5}$; de sorte que le développement (113) peut se réécrire sous forme d'un développement en puissances décroissantes de $\bar{x}$.

Afin d'obtenir un développement asymptotique uniformément valable en amont du profil, on introduit les variables $(\bar{\xi},\bar{\sigma})$, dites uniformisantes, par les relations :

$$(115)\quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2}\, a_1 (\gamma+1)^{5/3} \left[2(\bar{\sigma})^2 - 1\right] (\bar{\xi})^{4/5} & (a) \\ \bar{y} = a_1 (\gamma+1)^{5/3}\, \bar{\sigma}\, \bar{\xi} & (b) \\ \bar{s} = (\bar{\sigma})^2 \qquad \text{et} \qquad \bar{\sigma} = (\bar{s})^{1/2}\, \operatorname{sgn} \bar{y} & (c) \end{cases}$$

Quand $\bar{\sigma} \to 0$, les relations (111)-(b) et (112)-(a) montrent que $\bar{\sigma} = 0\left[\frac{\bar{y}}{(\bar{x})^{5/4}}\right]$ et, de (115)-(b), on déduit $\bar{\xi} = 0\left[(\bar{x})^{5/4}\right]$.

Hors de l'axe des $\bar{x}$, $\bar{\sigma} = O(1)$ et, grâce à (115)-(b), $\bar{\xi} = O(\bar{y})$. Ainsi, $\bar{\xi}$ se comporte comme $(\bar{x})^{5/4}$ en amont du profil, et comme $\bar{y}$ au-dessus du profil : de la sorte se trouve respectée la loi classique de <u>similitude transsonique</u>.

A partir de (113), nous allons déterminer le champ asymptotique des vitesses en composantes cartésiennes, à l'infini. A titre d'exemple, prenons un potentiel du type $\varphi_n = (\bar{y})^n\, f_n(\bar{\xi})$, on déduit

$$(116)\quad \begin{cases} u_n = \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial \bar{x}} = (\bar{y})^n \dfrac{df_n}{d\bar{s}} \dfrac{d\bar{s}}{d\bar{\xi}} \dfrac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} & (a) \\ v_n = \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial \bar{y}} = n(\bar{y})^{n-1} f_n + (\bar{y})^n \dfrac{df_n}{d\bar{s}} \dfrac{d\bar{s}}{d\bar{\xi}} \dfrac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{y}} & (b) \end{cases}$$

$$(111).(b) \Longrightarrow \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} = (\gamma+1)^{-1/3} (\bar{y})^{-4/5}\,, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{y}} = -\frac{4}{5} (\gamma+1)^{-1/3} (\bar{y})^{-9/5}$$

$$(112).(a) \Longrightarrow \frac{d\bar{s}}{d\bar{\xi}} = 5\, a_1^{-1/5} (3\bar{s}+1)^{-1} (\bar{s})^{7/5}$$

Compte tenu de ces deux dernières relations et de (112).(a), (116) devient

$$(117)\quad \begin{cases} u_n = 5(\gamma+1)^{-1/3} a_1^{-1/5} \left[3\bar{s}+1\right]^{-1} (\bar{s})^{7/5} \dfrac{df_n}{d\bar{s}} (\bar{y})^{n-4/5} & (a) \\ v_n = \left\{n f_n - 2(2\bar{s}-1)(3\bar{s}+1)^{-1}\, \bar{s} \dfrac{df_n}{d\bar{s}}\right\} (\bar{y})^{n-1} & (b) \end{cases}$$

On observe qu'il suffit de calculer la dérivée première de f_n qui est connue en fonction de $\bar{s}$ (cf. (114)). Choisissons le cas de la solution homogène c'est-à-dire $n = \frac{2}{5}$.

$$(112).(b) \Longrightarrow \frac{df}{d\bar{s}} = \frac{a_1^{3/5}}{5} \; (\bar{s}-1)(3\bar{s}+1)(\bar{s})^{-6/5}$$

D'où :

$$(118) \quad \begin{cases} u_{2/5} = a_1^{2/5}(\gamma+1)^{-1/3} \; (\bar{s}-1)(\bar{s})^{1/5} \; (\bar{y})^{-2/5} \\ v_{2/5} = \dfrac{a_1^{3/5}}{3}(3-2\bar{s})(\bar{s})^{4/5} \; (\bar{y})^{-3/5} \end{cases}$$

Tenant compte de (115).(b) et (c), (118) s'écrit

$$(119) \quad \begin{cases} u_{2/5} = (\gamma+1)^{-1} \; [(\bar{\sigma})^2-1](\bar{\varsigma})^{-2/5} \\ v_{2/5} = \dfrac{(\gamma+1)^{-1}}{3}[3-2(\bar{\sigma})^2] \; \bar{\sigma} \; (\bar{\varsigma})^{-3/5} \end{cases}$$

qui sont bien les composantes cartésiennes, en variables $(\bar{\varsigma},\bar{\sigma})$, pour la solution homogène. Le même travail doit être fait pour les 3 autres termes afférents à $n = 0$, $n = -\frac{1}{5}$ et $n = -\frac{2}{5}$. Les calculs sont très longs. On obtient finalement :

$$(120) \quad \begin{cases} u = 1+(\gamma+1)^{-1}\mathcal{S}_1(\bar{s})(\bar{\varsigma})^{-2/5}+(\gamma+1)^{-2} \; \dfrac{\bar{s}}{12(3\bar{s}+1)} \; \mathcal{S}_2(\bar{s})(\bar{\varsigma})^{-4/5}+3\Lambda_{-1/5} \; \mathcal{S}_3(\bar{s})(\bar{\varsigma})^{-1}+ \\ +(\gamma+1)^{-3}\left[\Lambda_{-2/5} \; \dfrac{(6\bar{s}-1)}{(3\bar{s}+1)} + \dfrac{\bar{s}}{1440(3s+1)^3} \; \mathcal{S}_4(\bar{s})\right](\bar{\varsigma})^{-6/5}+(\gamma+1)^{-1}\left[6\Lambda_{-\frac{3}{5}}(\bar{s})^{1/2} \; \dfrac{(2-3\bar{s})}{(3\bar{s}+1)} + \right. \\ \left. + \Lambda_{-1/5}(\bar{s})^{1/2}\mathcal{S}_5(\bar{s})+(\bar{s})^{1/2}\right](\bar{\varsigma})^{-7/5} + \ldots . \quad (a) \\ v = \frac{1}{3} \; (\gamma+1)^{-1}Q_1(\bar{s})(\bar{\varsigma})^{-3/5}+(\gamma+1)^{-2} \; \dfrac{(\bar{s})^{1/2}(1-2\bar{s})}{30(3\bar{s}+1)} \; Q_2(\bar{s})(\bar{\varsigma})^{-1} + \end{cases}$$

$$+ \Lambda_{-\frac{1}{5}} Q_3(\bar{s})(\bar{\varsigma})^{-6/5} + (\gamma+1)^{-3}\left[2\Lambda_{-2/5}(\bar{s})^{1/2}\frac{(2-3\bar{s})}{(3\bar{s}+1)} + \frac{(\bar{s})^{1/2}}{5040(3\bar{s}+1)^3} Q_4(\bar{s})\right](\bar{\varsigma})^{-7/5} +$$

$$+ (\gamma+1)^{-1}\left[3\Lambda_{-3/5}\frac{(\bar{s}-1)(6\bar{s}-1)}{(3\bar{s}+1)} + \Lambda_{-1/5} Q_5(\bar{s}) + (\bar{s})^{1/2}\right](\bar{\varsigma})^{-8/5} + \ldots \qquad (b)$$

Les quantités $\varsigma_i(\bar{s})$, $Q_i(\bar{s})$ ainsi que les constantes $\Lambda_{-1/5}$, $\Lambda_{-2/5}$ et $\Lambda_{3/5}$ sont données en annexe 1 , Ⓐ

4.1.2. Développement asymptotique des caractéristiques-limites.

Il s'agit de déterminer le comportement asymptotique des caractéristiques-limites, à l'infini, au niveau de l'approximation du potentiel des vitesses (113) c'est-à-dire : écoulement uniforme plus 5 termes correctifs. Contrairement au potentiel des vitesses, les caractéristiques-limites n'ont pas été déterminées en [10] jusqu'à cet ordre, il faut donc bien les calculer.

Appelant (u^P, v^P) la vitesse de perturbation et c la célérité du son, l'équation générale des caractéristiques s'écrit

$$(121) \qquad \left[c^2-(1-u^P)^2\right]+2(1+u^P)v^P\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} + \left[c^2-(v^P)^2\right]\left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}\right)^2 = 0 .$$

Compte tenu de la relation de Bernoulli

$$(122) \qquad \frac{1}{2}\left[(1+u^P)^2 + (v^P)^2\right] + \frac{c^2}{(\gamma-1)} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} ,$$

(121) devient :

$$(123) \qquad -\left[(\gamma+1)u^P + \frac{(\gamma+1)}{2}(u^P)^2 + \frac{(\gamma-1)}{2}(v^P)^2\right]+2(1+u^P)v^P\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}+\left[1-(\gamma-1)u^P - \frac{(\gamma-1)}{2}\right.$$

$$\left.\cdot(u^P)^2 - \frac{(\gamma+1)}{2}(v^P)^2\right]\left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}\right)^2 = 0.$$

Les caractéristiques-limites sont des caractéristiques particulières : ce sont les seules allant jusqu'à l'infini. On en cherche une représentation sous la forme

$$(124) \qquad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_o + \bar{\zeta}_1(\bar{y})^{-2/5} + \bar{\zeta}_2(\bar{y})^{-3/5} + \bar{\zeta}_3(\bar{y})^{P} + \dots , \quad P < -3/5, \ \bar{\zeta}_i = \text{cte},$$

les trois premières puissances ayant été déterminées en [10].

Remarque. En [10], on avait déterminé le coefficient a_1 en imposant que la caractéristique-limite, à l'ordre de la solution homogène, ait pour équation :

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_o = 1 \Longrightarrow a_1 = 2^9.3^3.5^{-5} ,$$

grâce à un choix adéquat de l'unité de longueur.

Bien entendu, il n'est plus question désormais de choisir la valeur de a_1 : pour un profil arbitraire mais fixé, et pour une unité de longueur donnée (par exemple la corde du profil), a_1 possède certainement une valeur bien déterminée, mais parfaitement inconnue tant que l'écoulement global n'a pas été résolu.

La substitution de (124) dans (123) montre que $P = -4/5$ et détermine, après les calculs assez longs, les constantes $\bar{\zeta}_o$, $\bar{\zeta}_1$, $\bar{\zeta}_2$ et $\bar{\zeta}_3$. Finalement, la forme asymptotique des caractéristiques-limites s'écrit

$$(125) \qquad \bar{x} = \bar{A}(\bar{y})^{4/5} + B(\bar{y})^{2/5} + C(y)^{1/5} + \bar{D}(\bar{y})^{o} + \bar{E}(\bar{y})^{-1/5} + O((\bar{y})^{-2/5})$$

Les constantes $\bar{A}$, B, C et $\bar{D}$ sont données en annexe 1 (B).

Les caractéristiques-limites (125) peuvent être écrites en variables $(\bar{\xi},\bar{\sigma})$. Les calculs sont ici encore un peu longs. On trouve

(126) $$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_o + \bar{\sigma}_1(\bar{\varsigma})^{-2/5} + \bar{\sigma}_2(\bar{\varsigma})^{-3/5} + \bar{\sigma}_3(\bar{\varsigma})^{-4/5} + \bar{\sigma}_4(\bar{\varsigma})^{-1} + \ldots,$$

les constantes $\bar{\sigma}_o$, $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}_3$ et $\bar{\sigma}_4$ se trouvent dans l'annexe 1 Ⓒ.

4.2. Cas particulier du profil symétrique.

L'écoulement symétrique par rapport à l'axe $\Omega\bar{x}$ est un cas particulier de l'étude faite en 4.1.

Les composantes cartésiennes de la vitesse à l'infini se déduisent des relations (120).(a) et (b) en y faisant tout simplement

$$\Lambda_{-\frac{1}{5}} = 0 \quad \text{et} \quad \Lambda_{\frac{3}{5}} = 0 .$$

Le comportement de la caractéristique-limite en variables $(\bar{x},\bar{y})$ se déduit de (125) en y faisant $C = 0$ et $\bar{E} = 0$.

Remarque concernant le paragraphe 4.

Les comportements de la vitesse et de la caractéristique-limite sont absolument essentiels dans la méthode que nous développons. En particulier, on a vu dans le paragraphe 3.3. que le développement asymptotique des vitesses servait de "cible", aussi aucune erreur ne peut être tolérée. Tous les calculs analytiques, très longs, qui ont permis d'aboutir aux formules (120), (125) et (126) ont été vérifiés et recoupés par utilisation d'une méthode différente, dans l'hodographe.

5. Formulation mathématique du problème.

Dans toute la suite, nous nous intéresserons au cas d'un écoulement plan, symétrique et nous limiterons le calcul au demi-plan $\bar{y} \geq 0$. Mais la généralisation au cas d'un écoulement non symétrique ne présenterait aucune difficulté de fond ; il en va de même pour le cas de révolution, pour lequel on dispose [12] de formules correspondant à (120), (125), (126).

5.1. Pourquoi il faut se donner la forme de la caractéristique-limite.

Raisonnons comme si nous avions affaire à un problème hyperbolique pur. Les données de Cauchy sur la partie AC du profil, voir figure 9, déterminent la solution, c'est-à-dire le champ des vitesses de composantes (u,v), seulement dans la région hachurée limitée par la caractéristique ① la plus interne issue du point C. Or, la caractéristique-limite ② est la caractéristique la plus externe issue de C. Voilà pourquoi il faut aussi se donner la forme de la caractéristique-limite ② pour déterminer (u,v) dans toute la zone transsonique, c'est-à-dire jusqu'à la caractéristique ②.

Sans le dire explicitement, CHUSHKIN, lui aussi, posait un problème de Cauchy mais sans se donner la courbe ②. Implicitement, il effectuait un simple prolongement de ① à ② , ce qui laisse subsister quelques doutes quant à son résultat, du moins en ce qui concerne la forme de la frontière transsonique. D'ailleurs, en privé, il nous a dit avoir eu des difficultés pour calculer l'écoulement compris entre la caractéristique-limite et l'onde de choc, c'est le problème 2 évoqué au paragraphe 3.1., une focalisation des caractéristiques se produisant.

5.2. Pose du problème dans le plan physique.

Pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe 6.4.1., introduisons un nouveau système d'axes orthonormé direct (O,x,y) obtenu, à partir du système $(\Omega,\vec{x},\vec{y})$, par la translation $\overrightarrow{O\Omega} = \vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$: $x = \tau+\bar{x}$, $y = \bar{y}$.

Supposons provisoirement que l'on connaisse :

(i) la distribution des vitesses sur le profil, c'est-à-dire,

$$V = V(x) \qquad \forall x \in [x_A, x_C] \qquad \text{(cf. figure 10)}$$

(ii) la forme de la caractéristique-limite soit

$$y = y_{CL}(x) \qquad \forall x \in [x_C, x_{C'}] \ .$$

Alors, les deux composantes de la vitesse définies sur la caractéristique-limite sont données par (ii). En effet, la théorie des caractéristiques pour les écoulements plans, isentropiques, stationnaires, irrotationnels nous fournit les équations classiques :

$$(127)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \zeta_+(u,v) & \text{sur une } C_+ \qquad (a) \\ du + \zeta_-(u,v)\, dv = 0 & \text{sur une } \Gamma_+ \qquad (b) \\ \zeta_\pm(u,v) = \dfrac{-uv \pm a\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{a^2-u^2} & \qquad (c) \end{cases}$$

L'équation (127).(b), où l'on tient compte de (127).(c), s'intègre, a priori, par une quadrature : ses courbes intégrales sont les épicycloïdes habituelles dans l'hodographe. La constante d'intégration, c'est-à-dire finalement le choix de l'épicycloïde image de la caractéristique-limite, se détermine en imposant que c'est la seule caractéristique allant à l'infini, donc vérifiant $u = 1$ pour $v = 0$. Sur la caractéristique-limite existe donc une relation du type $F(u,v) = 0$ laquelle, jointe à (127).(a) donne bien $u = u_{CL}(x)$ et $v = v_{CL}(x)$ $\forall x \in [x_C, x_{C'}]$ (cf. figure 10).

Notons enfin que (i), jointe à la donnée $y = y_{\mathcal{P}}(x)$ définissant la forme du profil, détermine $u = u_{\mathcal{P}}(x)$, $v = v_{\mathcal{P}}(x)$ le long du profil grâce à la condition de glissement. Au point d'intersection C, de la caractéristique-limite et du profil (cf. figure 10), le champ $(u_{\mathcal{P}}(x), v_{\mathcal{P}}(x))$ devra satisfaire la relation $F(u,v) = 0$. Nous obtenons l'équation

$$(128)\quad F(u_{\mathcal{P}}(x), v_{\mathcal{P}}(x)) = 0$$

qui définit l'abscisse x_C du pied de la caractéristique-limite sur le profil et, de là, la vitesse $u_{\mathcal{P}}(x_C)$ et $v_{\mathcal{P}}(x_C)$ au point C. On peut donc calculer l'angle

de Mach et l'angle polaire de la vitesse en C, d'où la pente de la caractéristique-limite en son pied par

$$(129) \qquad y'_{CL}(x_C) = \operatorname{tg}\left[\operatorname{Arctg}\left(\frac{v}{u}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{M}\right)\right]_{x=x_C} .$$

Ces deux résultats, x_C et $y'_{CL}(x_C)$, doivent satisfaire (ii).
De sorte que <u>les données (i) et (ii) doivent être prises compatibles entre elles</u>.

Précisons maintenant les équations aux dérivées partielles du problème. Nous avons pour équations du mouvement la conservation de la masse et l'irrotationnalité, soient :

$$(130) \qquad \begin{cases} \operatorname{div}(\tilde{\varrho}\,\vec{V}) = 0 & (a) \\ \operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0} & (b) \end{cases}$$

$\tilde{\varrho}$ représentant la masse volumique du fluide.

De (130) on peut éliminer la masse volumique $\tilde{\varrho}$ grâce à la relation isentropique

$$(131) \qquad \frac{\tilde{\varrho}}{\tilde{\varrho}_o} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} - (u^2+v^2)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$\tilde{\varrho}_o$ étant la masse volumique prise en un point d'arrêt.

Finalement le problème de Cauchy avec conditions aux limites que nous avons à résoudre, s'énonce :

Problème (P_I)

? $u(x,y)$, $v(x,y)$ $\quad (x,y) \in (A,C,C',A')$, (cf. figure 10)

$$(132)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} & (a) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)-(u^2+v^2)\right]^{1/(\gamma-1)} u\right\} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)-(u^2+v^2)\right]^{1/(\gamma-1)} v\right\} = 0 & (b) \end{cases}$$

avec

- les conditions initiales

$$u(x,y_{\mathcal{P}}(x)) = u_{\mathcal{P}}(x)\ ,\ v(x,y_{\mathcal{P}}(x)) = v_{\mathcal{P}}(x),\quad \forall x \in [x_A,x_C]$$

- les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(x,y_{CL}(x)) = u_{CL}(x),\ v(x,y_{CL}(x)) = v_{CL}(x),\quad \forall x \in [x_A,x_C] \\ v(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \forall x \in [x_{A'},x_A] \end{cases}$$

Remarques.

a) u et v représentent les composantes cartésiennes du vecteur vitesse dans le repère (0,x,y),

b) les conditions initiales sont les données du champ des vitesses sur le profil, (i),

c) les conditions aux limites sont, d'une part le champ des vitesses sur la caractéristique-limite, (ii), et d'autre part les conditions de symétrie sur l'axe des x. Il faut bien noter que ces conditions de symétrie représentent une pure technique permettant d'éviter de résoudre l'ensemble des deux moitiés ($y \geq 0$, $y \leq 0$) de la zone transsonique, avec donnée des deux caracté-

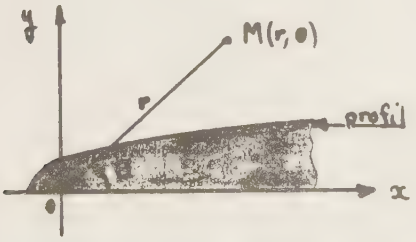
ristiques-limites symétriques, problème qui donnerait évidemment des résultats symétriques.

On sait que pour un problème aux limites, surtout en hyperbolique, les conditions initiales et les conditions aux limites doivent être écrites avec grand soin sur le problème discrétisé. C'est pourquoi nous n'avons pas envisagé une discrétisation à l'aide d'une grille orthogonale dans le plan physique.

5.3. Pose définitive du problème.

5.3.1. Introduction de nouvelles variables.

On introduit un système de coordonnées curvilignes, non orthogonales, appelées η et ς, de sorte que $\varsigma = 0$ soit le profil, $\varsigma = \varsigma_\infty$ le bord extérieur du domaine d'intégration, $\eta = 0$ l'axe de symétrie et $\eta = 1$ la caractéristique-limite (figure 11).



Appelons r et θ les coordonnées polaires habituelles d'un point M de l'écoulement. Nous introduisons les nouvelles coordonnées σ, ς pour le point M, par les relations

(133) $$\sigma = \pi - \theta \quad (a) \quad , \qquad \varsigma = \left[r - F(\sigma) \right] . G(\sigma) \quad (b) \quad , \quad G(\sigma) > 0 \quad (c)$$

la fonction $r_{\mathcal{P}} = F(\sigma)$ caractérisant la forme du profil considéré, et $G(\sigma)$ étant une fonction dont le rôle est d'adapter au mieux les lignes coordonnées ς = cte. Cette fonction $G(\sigma)$ sera précisée un peu plus loin. Enfin, le passage des variables (ς, σ) aux variables (ς, η) s'effectue par les relations

(134) $$\eta = \frac{\sigma}{\sigma_{CL}(\varsigma)} \qquad (a) \qquad , \qquad \varsigma = \varsigma \qquad (b)$$

$\sigma = \sigma_{CL}(\varsigma)$ étant l'équation de la caractéristique-limite en variables (ς,σ).

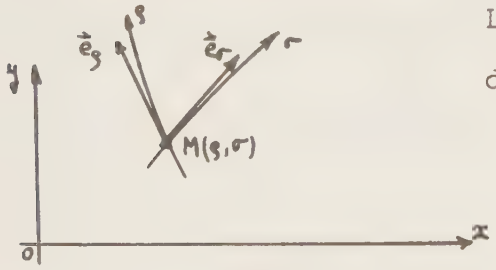
Des relations $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, et de (133), on déduit

(135)
$$x = -\left[\frac{\varsigma}{G(\sigma)} + F(\sigma)\right]\cos\sigma \qquad (a)$$

$$y = \left[\frac{\varsigma}{G(\sigma)} + F(\sigma)\right]\sin\sigma \qquad (b)$$

Les variables (ς,η) définies précédemment répondent bien aux conditions demandées. En effet, si le point M parcourt le profil, (133).(b) impose $\varsigma = 0$, et si le point M parcourt la caractéristique-limite, (134).(a) impose $\eta = 1$.

Changement de variables $(x,y) \longrightarrow (\varsigma,\sigma)$



Les vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{f}$ tangents aux lignes coordonnées σ = cte et ς = cte sont définis par

(136)
$$\vec{e}_\varsigma = \frac{\partial\vec{M}}{\partial\varsigma}, \qquad \vec{e}_\sigma = \frac{\partial\vec{M}}{\partial\sigma}$$

Leurs composantes cartésiennes, dans le repère (O,x,y) s'écrivent

(137)
$$\vec{e}_\varsigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varsigma} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial\varsigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos\sigma}{G(\sigma)} \\ \\ \frac{\sin\sigma}{G(\sigma)} \end{pmatrix}$$

(138)
$$\vec{e}_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\sigma} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{G^2(\sigma)}\left(\varsigma\cos\sigma G'(\sigma) + \{\varsigma\sin\sigma + \left[\sin\sigma\, F(\sigma) - \cos\sigma F'(\sigma)\right]G(\sigma)\}G(\sigma)\right) \\ \\ \frac{1}{G^2(\sigma)}\left(-\varsigma\sin\sigma G'(\sigma) + \{\varsigma\cos\sigma + \left[\cos\sigma F(\sigma) + \sin\sigma F'(\sigma)\right]G(\sigma)\}\,G(\sigma)\right) \end{pmatrix}$$

D'où découle le tenseur euclidien fondamental g_{ij} :

$$(139)\quad \left\{ \begin{array}{l} g_{11} = \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varsigma} \cdot \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varsigma} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \varsigma}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \varsigma}\right)^2 = \dfrac{1}{G^2(\sigma)} \qquad (a) \\ \\ g_{12} = g_{21} = \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varsigma} \cdot \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \sigma} = \dfrac{\partial x}{\partial \varsigma}\dfrac{\partial x}{\partial \sigma} + \dfrac{\partial y}{\partial \varsigma}\dfrac{\partial y}{\partial \sigma} = \dfrac{1}{G^3(\sigma)}\left[G^2(\sigma)F'(\sigma) - \varsigma\, G'(\sigma)\right] \qquad (b) \\ \\ g_{22} = \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \sigma} \cdot \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \sigma} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 = \dfrac{1}{G^4(\sigma)}\left\{\varsigma^2\left[G'^2(\sigma) + G^2(\sigma)\right] + 2\varsigma G^2(\sigma)\left[-G'(\sigma)\right.\right. \\ \\ \left.\left. .F'(\sigma) + G(\sigma)\,F(\sigma)\right] + G^4(\sigma)\left[F^2(\sigma) + F'^2(\sigma)\right]\right\} \qquad (c) \end{array} \right.$$

En général nous avons $g_{12} \neq 0$, de sorte que le système de coordonnées curvilignes (ς, σ) est non orthogonal.

Posant $g = \det g_{ij}$, il est facile de vérifier que $g = J^2$ où J est le jacobien défini par $J = \dfrac{D(x,y)}{D(\varsigma,\sigma)}$, soit après quelques calculs

$$(140)\qquad J = -\frac{1}{G^2(\sigma)}\left(\varsigma + F(\sigma)\,G(\sigma)\right) < 0$$

Pourvu qu'on choisisse la fonction $G(\sigma) \neq 0$, la transformation $(x,y) \longrightarrow (\varsigma,\sigma)$ est bijective et puisque $J < 0$ on a $(\vec{e}_\varsigma, \vec{e}_\sigma) < 0$.

Du point de vue des notations, nous appellerons

$$(141)\quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ u, v \text{ les composantes cartésiennes de la vitesse} \\ \bullet\ u_1, v_1 \text{ les composantes covariantes de la vitesse} \\ \bullet\ u_2, v_2 \text{ les composantes contravariantes de la vitesse} \end{array} \right\} \text{ pour les variables } (\varsigma,\sigma)$$

Relations entre composantes cartésiennes et contravariantes de la vitesse.

$$V = u\,\vec{x} + v\,\vec{y} = u_2\,\vec{e}_\varsigma + v_2\,\vec{e}_\sigma = u_2\,\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varsigma} + v_2\,\frac{\partial \vec{M}}{\partial \sigma}\ ,$$

où $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont les vecteurs unitaires de la base $(0,x,y)$. Il en résulte les relations

$$(142)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial x}{\partial \varsigma}\, u_2 + \dfrac{\partial x}{\partial \sigma}\, v_2 \\ \\ v = \dfrac{\partial y}{\partial \varsigma}\, u_2 + \dfrac{\partial y}{\partial \sigma}\, v_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_2 = \dfrac{1}{D}\left(\dfrac{\partial y}{\partial \sigma}\, u - \dfrac{\partial x}{\partial \sigma}\, v\right) \\ \\ v_2 = \dfrac{1}{D}\left(-\dfrac{\partial y}{\partial \varsigma}\, u + \dfrac{\partial x}{\partial \varsigma}\, v\right) \end{cases}$$

avec $D = \dfrac{\partial x}{\partial \varsigma}\dfrac{\partial y}{\partial \sigma} - \dfrac{\partial y}{\partial \varsigma}\dfrac{\partial x}{\partial \sigma} = J$, et $J \neq 0$ d'après (140).

Relations entre composantes covariantes et contravariantes de la vitesse.

Les composantes contravariantes u_2 et v_2 de la vitesse $\vec{V}$ sont définies par

$$(143)\qquad \vec{V} = u_2\, \vec{e}_\varsigma + v_2\, \vec{e}_\sigma \ ,$$

et les composantes covariantes u_1 et v_1 de la vitesse V par

$$(144)\qquad u_1 = \vec{V}.\vec{e}_\varsigma \quad , \quad v_1 = \vec{V}.\vec{e}_\sigma$$

Des relations (143), (144) et de la définition du tenseur métrique g_{ij} nous obtenons

$$(145)\quad \begin{cases} u_1 = g_{11}\, u_2 + g_{12}\, v_2 \\ \\ v_1 = g_{21}\, u_2 + g_{22}\, v_2 \end{cases}$$

et puisque $g = \det g_{ij} \neq 0$ on peut inverser le système (145).

Il peut être intéressant d'exprimer le carré de la vitesse en fonction des composantes contravariantes.

(146) $$V^2 = \vec{V}.\vec{V} = u^2 + v^2 = g_{11}\, u_2^2 + 2g_{12}\, u_2\, v_2 + g_{22}\, v_2^2$$

grâce à (143) et à la définition des g_{ij}.

Remarque.

Du point de vue pratique, les composantes covariantes et contravariantes seront employées pour écrire la condition aux limites sur la frontière transsonique. Les équations du mouvement, en variables (ς,σ) ou (ς,η), utiliseront les composantes cartésiennes u et v.

5.3.2. Pente des caractéristiques dans le plan (ς,σ).

On verra, par la suite, qu'il est intéressant de connaître la pente de la caractéristique-limite dans le repère (ς,σ).

L'angle de Mach, A, est défini par

(147) $$A = \text{Arc sin}\left(\frac{1}{M}\right) = \text{Arc sin}\sqrt{\frac{c^2/V_\ell^2}{V^2/V_\ell^2}}$$

M étant le nombre de Mach, c la célérité du son, V le module de la vitesse, ces quantités étant prises au point considéré. La vitesse limite V_ℓ est telle que $V_\ell^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$.

De la relation (147), et de l'intégrale première de Bernoulli, il vient

(148) $$A = \text{Arc sin}\sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\cdot\frac{\left[1-(V^2/V_\ell^2)\right]}{(V^2/V_\ell^2)}}$$

et, de là,

$$(149)\quad \operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\ \frac{(1-V^2/V_\ell^2)}{(V^2/V_\ell^2)}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\ \frac{[1-(V^2/V_\ell^2)]}{(V^2/V_\ell^2)}}}$$

Compte tenu de (146), la relation (149) devient

$$(150)\quad \operatorname{tg} A = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)(g_{11}\,u_2^2 + 2g_{12}\,u_2\,v_2 + g_{22}\,v_2^2)}{(g_{11}\,u_2^2 + 2g_{12}\,u_2\,v_2 + g_{22}\,v_2^2) - 1}}$$

Soit $\sigma = \sigma_{CL}(\varsigma)$ l'équation de la caractéristique-limite supérieure, la pente de la caractéristique-limite passant par le point P (figure 12) est représentée par $\frac{d\sigma}{d\varsigma}(\varsigma, \sigma_{CL}(\varsigma))$. Donc, le long de la caractéristique-limite en question passant par le point $P(\varsigma,\sigma_{CL}(\varsigma))$, pour un déplacement élémentaire on a :

$$d\vec{P}(\varsigma,\sigma_{CL}(\varsigma)) = \left[\frac{\partial\vec{P}}{\partial\varsigma} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial\sigma}\,\sigma'_{CL}\right]d\varsigma = \left[\vec{e}_\varsigma + \sigma'_{CL}\,\vec{e}_\sigma\right]d\varsigma$$

Maintenant, il s'agit d'exprimer que la caractéristique-limite fait l'angle de Mach A avec la vitesse, autrement dit que

$$(\vec{V},\ d\vec{P}) = +A + k\pi$$

L'angle précédent s'écrit encore

$$\varphi \equiv (u_2\,\vec{e}_\varsigma + v_2\,\vec{e}_\sigma,\ \left[\vec{e}_\varsigma + \sigma'_{CL}\,\vec{e}_\sigma\right]\,d\varsigma)$$

d'où :

$$\sin\varphi = \frac{(u_2\,\vec{e}_\varsigma + v_2\,\vec{e}_\sigma)\ \Lambda\ (\vec{e}_\varsigma + \sigma'_{CL}\,\vec{e}_\sigma)\,d\varsigma}{||d\varsigma(u_2\,\vec{e}_\varsigma + v_2\,\vec{e}_\sigma)||\ \ ||\vec{e}_\varsigma + \sigma'_{CL}\,\vec{e}_\sigma||}$$

$$\cos\varphi = \frac{(u_2\,\vec{e}_\varsigma + v_2\,\vec{e}_\sigma)\ .\ (\vec{e}_\varsigma + \sigma'_{CL}\,\vec{e}_\sigma)\,d\varsigma}{||d\varsigma(u_2\,\vec{e}_\varsigma + v_2\,\vec{e}_\sigma||\ \ ||\vec{e}_\varsigma + \sigma'_{CL}\,\vec{e}_\sigma||}$$

et de là, après quelques calculs :

$$(151) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{(u_2\,\sigma'_{CL} - v_2)\,J}{g_{11}\,u_2 + g_{12}\,(u_2\,\sigma'_{CL} + v_2) + g_{22}\,v_2\,\sigma'_{CL}}$$

D'où la condition nécessaire pour que $\vec{dP}$ soit tangente à la caractéristique-limite supérieure :

$$\varphi = A + k\,\pi \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} A, \text{ soit}$$

$$(152) \qquad \frac{J(u_2\,\sigma'_{CL} - v_2)}{g_{11}u_2 + g_{12}(u_2\sigma'_{CL}+v_2) + g_{22}\sigma'_{CL}v_2} = \sqrt{\frac{1-(\frac{\gamma-1}{\gamma+1})(g_{11}u_2^2 + 2g_{12}u_2v_2 + g_{22}v_2^2)}{(g_{11}u_2^2 + 2g_{12}u_2v_2 + g_{22}v_2^2)-1}}$$

de cette dernière relation on tire :

$$(153) \qquad \frac{d\sigma_{CL}}{d\xi} = \frac{Jv_2 + (g_{11}\,u_2 + g_{12}\,v_2)\ \operatorname{tg} A}{Ju_2 - (g_{12}\,u_2 + g_{22}\,v_2)\ \operatorname{tg} A}$$

Remarques.

a) Si l'on avait à écrire la deuxième caractéristique-limite, celle située dans le demi-plan inférieur, on changerait A en -A dans (153),

b) En tenant compte de (145), la pente de la caractéristique-limite donnée par (153) s'écrit encore

$$\frac{d\sigma_{CL}}{d\xi} = \frac{Jv_2 + u_1 \operatorname{tg} A}{Ju_2 - v_1 \operatorname{tg} A}$$

J étant toujours le jacobien défini en (140).

5.3.3. Ecriture des équations du mouvement en variables ξ et η ; Problème (P_T).

Ce sont les équations (132).(a) et (b) que nous allons transformer. Nous avons :

$$(154)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \sigma}\dfrac{\partial \sigma}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial \varsigma}\dfrac{\partial \varsigma}{\partial x} & \text{(a)} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial \sigma}\dfrac{\partial \sigma}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial \varsigma}\dfrac{\partial \varsigma}{\partial y} & \text{(b)} \end{cases}$$

Par définition des coordonnées polaires

$$(155)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \quad , \quad \dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-\sin\theta}{r} \quad , \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$

et de là :

$$(156)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{\sin\theta}{r} = \dfrac{G(\sigma).\sin\sigma}{\varsigma + G(\sigma)\,F(\sigma)} & \text{(a)} \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial y} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -\dfrac{\cos\theta}{r} = \dfrac{G(\sigma).\cos\sigma}{\varsigma + G(\sigma)\,F(\sigma)} & \text{(b)} \end{cases}$$

grâce aux relations (133).(a) et (b).

Par des arguments analogues, il est facile de montrer que

$$(157)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varsigma}{\partial x} = \dfrac{\varsigma\, G'(\sigma)\sin\sigma - \{\varsigma\cos\sigma + [F(\sigma)\cos\sigma + F'(\sigma)\sin\sigma]\, G(\sigma)\}\, G(\sigma)}{\varsigma + F(\sigma)\;\; G(\sigma)} & \text{(a)} \\ \dfrac{\partial \varsigma}{\partial y} = \dfrac{\varsigma\, G'(\sigma)\cos\sigma + \{\varsigma\sin\sigma + [F(\sigma)\sin\sigma - F'(\sigma)\cos\sigma]\, G(\sigma)\}\, G(\sigma)}{\varsigma + F(\sigma)\;\; G(\sigma)} & \text{(b)} \end{cases}$$

La substituion de (156), (157) et (154) dans (132) donne les équations du mouvement en variables (ς,σ).

$$
(158)\quad \left\{
\begin{aligned}
& D_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + D_4 \frac{\partial v}{\partial \xi} = -G(\sigma)\cos\sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} + G(\sigma)\sin\sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} && \text{(a)}\\
& \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(u^2-1)+v^2\right] D_4 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left\{ \frac{4}{(\gamma-1)} u\, v\, D_4 - \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(v^2-1)+u^2\right] D_2 \right\} \frac{\partial v}{\partial \xi} = \\
& \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(u^2-1)+v^2\right]\sin\sigma G(\sigma)\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \left\{\frac{4}{(\gamma-1)} uv\sin\sigma G(\sigma) + \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(v^2-1)+u^2\right]\cos\sigma G(\sigma)\right\}\frac{\partial v}{\partial \sigma} && \text{(b)}
\end{aligned}
\right.
$$

La démonstration pour obtenir ces deux relations, et les expressions de D_2 et D_4, sont fournies dans l'annexe 2, Ⓐ.

En introduisant le vecteur $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, le système (158) se met sous la forme matricielle

$$
(159)\qquad \mathbb{A} \frac{\partial X}{\partial \xi} = \mathbb{B} \frac{\partial X}{\partial \sigma}
$$

Les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont données dans l'annexe 2.

Nous allons montrer qu'en pratique la matrice $\mathbb{A}$ est inversible,

$$
(160)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \det \mathbb{A} = a D_2^2 + 2b D_2 D_4 + c D_4^2 \quad \text{avec} \\
& a = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) - (u^2+v^2) - \frac{2}{(\gamma-1)} v^2 \quad , \; b = \frac{2}{(\gamma-1)} uv \; , \\
& c = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) - (u^2+v^2) - \frac{2}{(\gamma-1)} u^2
\end{aligned}
\right.
$$

(i) En général on aura $a > 0$ car $u^2 + v^2$ est nettement inférieur à $\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)$.

(ii) $b^2 - ac = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(1-u^2-v^2)$ après réduction.

De sorte que <u>pour $M < 1$</u>, $b^2 - ac < 0 \Longrightarrow$ <u>$\det \mathbb{A} > 0$</u> $\forall$ D_2 et D_4 .

<u>Pour $M > 1$</u> on peut réécrire det A sous la forme

(161) $$\det \mathbb{A} = -\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)\{(D_2^2 + D_4^2)\left[-(\gamma+1) + (\gamma-1)\,V^2\right] + 2(D_4\,u - D_2\,v)^2\}$$

Appelons $\tilde{\alpha}$ l'angle du vecteur vitesse, en un point arbitraire de la région supersonique, avec le vecteur-coordonnée $\vec{e}_\sigma$: $\tilde{\alpha} = (\vec{V},\vec{e}_\sigma)$. La relation (138) jointe à la définition de D_2 et D_4 (annexe 2) nous donne =

(162) $$\vec{e}_\sigma = \begin{pmatrix} \dfrac{D_2}{G^2(\sigma)} \\ \dfrac{D_4}{G^2(\sigma)} \end{pmatrix}_{(x,y)}$$

Nous observons d'abord que $\vec{V} \wedge \vec{e}_\sigma = \dfrac{1}{G^2(\sigma)}\left[D_4\,u - D_2\,v\right]\vec{k}$, $\vec{k}$ étant le vecteur unitaire formant avec $\vec{x}$ et $\vec{y}$ un repère orthonormé direct. Il en résulte

(163) $$D_4\,u - D_2\,v = G^2(\sigma)\;V\;|e_\sigma|\,\sin\tilde{\alpha}$$

De (161) et (163) nous déduisons :

(164) $$\det \mathbb{A} = -\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)(D_2^2 + D_4^2)\;\{-(\gamma+1) + \left[(\gamma-1) + 2\,\sin^2\tilde{\alpha}\right]V^2\}$$

On a $\det \mathbb{A} > 0$ sauf si $V^2 \geq \dfrac{\gamma+1}{(\gamma-1)+2\sin^2\tilde{\alpha}}$. Pour le choix de $G(\sigma)$ que nous ferons par la suite, les expériences en soufflerie montrent que $\tilde{\alpha}$ est nettement inférieur à 30° dans la région supersonique. Prenons $\tilde{\alpha} = 30°$ et $\gamma = 1.4$ alors on aurait $V^2 \geq 2{,}667$ soit $V \geq 1{,}6$, résultat contradictoire avec l'expérience, en ce qui concerne le domaine transsonique. Du point de vue pratique, on peut donc affirmer que $\det \mathbb{A} > 0$ et de là que $\mathbb{A}$ est inversible. Nous écrivons le système (159) sous la forme

(165) $$\frac{\partial X}{\partial \varsigma} = \mathbb{C}\,\frac{\partial X}{\partial \sigma} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C} = \mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{B}$$

Passons maintenant aux variables (ς,η) définies en (134). Nous avons

$$\frac{D(x,y)}{D(\varsigma,\eta)} = \frac{D(x,y)}{D(\varsigma,\sigma)} \frac{D(\varsigma,\sigma)}{D(\varsigma,\eta)} = J \frac{D(\varsigma,\sigma)}{D(\varsigma,\eta)}$$

mais :

$$\frac{D(\varsigma,\sigma)}{D(\varsigma,\eta)} = \sigma_{CL}(\varsigma) > 0$$

En tenant compte de (140), on observe que la transformation $(x,y)\to(\varsigma,\eta)$ est bijective et que $(\vec{e}_\varsigma,\vec{e}_\eta) < 0$.

Il est bien clair que :

$$(166)\qquad \begin{aligned} (\frac{\partial}{\partial\varsigma})_\sigma &= (\frac{\partial}{\partial\varsigma})_\eta - \frac{\sigma'_{CL}(\varsigma)}{\sigma_{CL}(\varsigma)}\ \eta\ (\frac{\partial}{\partial\eta})_\varsigma \\ (\frac{\partial}{\partial\sigma})_\varsigma &= \frac{1}{\sigma_{CL}(\varsigma)}\ (\frac{\partial}{\partial\eta})_\varsigma \end{aligned}$$

et de là, les équations du mouvement (165) s'écrivent

$$(167)\qquad \frac{\partial X}{\partial\varsigma} = \mathbb{D}\ \frac{\partial X}{\partial\eta}$$

la matrice $\mathbb{D}$, donnée dans l'annexe 2, (B), dépend de ς, η, u et v : le système est toujours, évidemment, quasi-linéaire.

Il nous est maintenant possible d'énoncer, sous sa forme définitive, le problème à résoudre.

Problème (P_T)

$$? \; u(\eta,\varsigma) \;,\; v(\eta,\varsigma) \qquad \forall\, (\eta,\varsigma) \in [0,1] \times [0,\varsigma_\infty]$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varsigma} = \mathbb{D}\, \frac{\partial X}{\partial \eta} \quad , \qquad X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{(0,x,y)}$$

avec

- les conditions initiales

$$u(\eta,0) \quad \text{et} \quad v(\eta,0) \text{ donnés } \forall\, \eta \in [0,1]$$

- les conditions aux limites

$$u(1,\varsigma) \quad \text{et} \quad v(1,\varsigma) \text{ donnés} \qquad \forall\, \varsigma \in [0,\varsigma_\infty]$$

$$v = v(0,\varsigma) = 0 \;,\; \frac{\partial u}{\partial \eta}(0,\varsigma) = 0 \qquad \forall \varsigma \in [0,\varsigma_\infty]$$

La ligne coordonnée $\varsigma = \varsigma_\infty$ est la "ligne d'arrivée" suffisamment éloignée du profil pour qu'on puisse y écrire les développements asymptotiques (113) et (125).

Notons que les expériences, en soufflerie, montrent que, pour un profil mince (de 5 à 12 % d'épaisseur relative), les développements asymptotiques (113) et (125) commencent à être valables assez près du profil, disons à $\frac{1}{3}$ de corde. Cette remarque est de grande importance car elle permet de limiter très nettement le domaine de calcul.

Enfin c'est sous la forme du problème transformé (P_T) que nous avons abordé la discrétisation.

Remarque.

Rappelons, encore une fois, qu'à l'heure actuelle, il n'existe aucun théorème nous permettant d'affirmer que le problème (P_T) possède une solution et une seule. D'ailleurs, même si cela était, il est classique depuis J. HADAMARD

qu'existence et unicité n'imposent en rien la continuité par rapport aux données ; la résolution numérique de tels problèmes est, comme nous le verrons, délicate.

---

6. Recherche des familles admissibles.

Le problème est précisément de trouver les bonnes données à savoir :

(i) la distribution des vitesses sur le profil $V = V(x)$

(ii) la forme de la caractéristique-limite $y = y_{CL}(x)$ pour que la solution du problème (P_T) s'approche, sur $\varsigma = \varsigma_\infty$, du développement asymptotique.

Il serait vain de chercher toutes les fonctions possibles $V(x)$ sur le profil et $y_{CL}(x)$ sur la caractéristique-limite. Nous allons seulement les chercher dans des familles dites "admissibles", compatibles au sens du § 5.2., et dépendant d'un petit nombre de paramètres. Nous nous contenterons de trouver les valeurs de ces paramètres fournissant les fonctions (i) et (ii) s'approchant au mieux de la solution (i) et (ii) théorique. Cette idée s'apparente à la méthode de Galerkine ou encore, aussi, à la méthode de Rayleigh-Ritz classique en élasticité. Nous ne prétendons pas obtenir les fonctions (i) et (ii) exactes, mais seulement les meilleures approximations, dans les familles admissibles choisies, des fonctions exactes.

Les familles admissibles, chez CHUSHKIN [6], se réduisaient à (i) et comprenaient toutes les combinaisons linéaires d'un petit nombre de fonctions trigonométriques (des $\sin(k\,\eta)$, $k = 1,2,3$, pour un écoulement symétrique). Mais ces mêmes familles admissibles intervenaient aussi dans le schéma numérique utilisé, la méthode des relations intégrales, et devaient donc être adaptées à la représentation des grandeurs de l'écoulement en fonction de η, pour toute valeur donnée de ς entre 0 et ς_∞. En particulier, pour un profil mince à bord d'atta-

que arrondi, cas que n'avait pas envisagé CHUSHKIN, la formule d'interpolation adaptée sur le profil ne l'est plus sur $\mathcal{C}_\infty$ et inversement.

Or, puisque nous utiliserons un schéma aux différences finies beaucoup plus fin, et tout à fait indépendant des données (i) et (ii), nous devenons parfaitement libres de choisir des familles admissibles mieux adaptées aux allures prévisibles des fonctions (i) et (ii), ce qui représente, au prix de calculs évidemment plus longs, un avantage indéniable sur la méthode des relations intégrales.

Pour la construction de ces familles admissibles, nous avons imposé un certain nombre de conditions nécessaires

a) la distribution des vitesses sur le profil V(x) doit posséder le bon comportement asymptotique au voisinage du point d'arrêt,

b) la forme de la caractéristique-limite $y_{CL}(x)$ doit posséder le bon comportement asymptotique à l'infini,

c) les deux familles V(x) et $y_{CL}(x)$ doivent être compatibles entre elles,

d) les deux familles V(x) et $y_{CL}(x)$ doivent être adaptées à la représentation des types de résultats fournis par l'expérience en soufflerie, c'est-à-dire que l'on doit pouvoir trouver dans chaque famille un bon encadrement des champs expérimentaux.

La dernière condition n'est pas essentielle mais son application a des conséquences pratiques non négligeables ; en effet, mieux vaut prendre des fonctions astucieuses, adaptées au problème, plutôt que n'importe quelle "base" classique de fonctions.

On observe que c'est certainement au niveau de la recherche des familles admissibles qu'une bonne connaissance du phénomène physique est essen-

tielle. Le mécanicien, guidé par des résultats d'expériences conduites en soufflerie, a, à cette étape, un rôle primordial à jouer. Un numéricien pur serait, lui, mal placé pour faire ce travail !

Du point de vue pratique, pour mettre au point la méthode de calcul, nous avons utilisé un profil bien classique : le NACA 0012. Ce profil, réalisé à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, nous a été aimablement prêté par l'O.N.E.R.A..

6.1. Caractéristiques essentielles du NACA 0012.

Appelons A le nez du profil et ℓ sa corde, nous posons

$$(168) \qquad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ 0 \end{pmatrix}_{(O,x,y)} \quad , \quad X = \frac{x-x_A}{\ell} \quad , \quad Y = \frac{y}{\ell}$$

et nous choisissons $x_A < 0$.

Dans les variables X et Y, qui sont des variables normalisées comptées à partir du nez, l'équation du profil NACA 0012 s'écrit :

$$(169) \qquad \left[\begin{array}{l} Y = 0.12 \left[b_1 \sqrt{X} + b_2 X + b_4 X^2 + b_6 X^3 + b_8 X^4 \right] \quad , \; 0 \leq X \leq 1 \\ \\ b_1 = 1{,}4845, \; b_2 = -0{,}6300, \; b_4 = -1{,}7580, \; b_6 = 1{,}4215, \; b_8 = -0{,}5075 \end{array} \right.$$

le profil étant symétrique, par hypothèse, par rapport à l'axe des x.

Posons par commodité $\alpha_i = 0{,}12\, b_i$ $(i = 1,2,4,6,8)$, l'équation du profil s'écrit

$$(170) \qquad Y = \alpha_1 \sqrt{X} + \alpha_2 X + \alpha_4 X^2 + \alpha_6 X^3 + \alpha_8 X^4 \quad , \quad 0 \leq X \leq 1.$$

L'étude de la dérivée Y' de (170) montre d'une part que la tangente au nez est verticale (le bord d'attaque est bien arrondi) et d'autre part que

Y' n'admet que X = 0,3 pour zéro dans l'intervalle $[0,1]$. Le maître-couple a donc $X_{MC} = 0,3$ pour abscisse.

Enfin, on peut noter que le rayon de courbure $\mathcal{R}_A$ au nez du profil est donné par

$$(171) \qquad \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{(1 + Y'^2)^{3/2}}{|Y''|} \right\} = \frac{\alpha_1^2}{2} \simeq 0,01587$$

De ce qui vient d'être dit, il résulte en particulier que la parabole d'équation

$$(172) \qquad Y^2 = \alpha_1^2 X$$

est osculatrice au nez du profil NACA 0012. Cette remarque aura son utilité pour ce qui suit.

6.2. Comportement asymptotique de la pression, sur le profil, au voisinage du bord d'attaque.

Les mesures expérimentales relevées sur le profil sont des mesures de pression. Pour le NACA 0012, ces dernières sont consignées sur la figure 13. Aussi, plutôt que de rechercher la distribution des vitesses sur le profil, nous avons construit une famille admissible de répartitions de pression, ce qui est tout à fait équivalent. En effet, en écoulement isentropique, comme c'est le cas en amont des chocs, on passe de la pression à la vitesse par la relation bien connue

$$(173) \qquad \frac{p}{p_o} = \left[1 - \frac{(\gamma-1)}{2} \left(\frac{V}{c_o}\right)^2\right]^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}}$$

p_o et c_o représentant respectivement la pression et la célérité du son au point d'arrêt.

Pourquoi faut-il faire une étude précise de la pression, sur le profil, au voisinage du nez ?

Le faible rayon de courbure au bord d'attaque impose un gradient de pression très important au voisinage du nez du profil. Bien qu'il ne s'agisse point, au sens strict, d'une singularité, cette région est très délicate, car sa dimension caractéristique se situe franchement à un ordre de grandeur au-dessous des dimensions caractéristiques du profil.

La vitesse V étant petite au voisinage du point d'arrêt, on peut développer $\frac{p}{p_o}$ sous la forme

$$\frac{p}{p_o} = 1 - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{V}{c_o}\right)^2 + \frac{\gamma}{8}\left(\frac{V}{c_o}\right)^4 + O(V^6), \tag{174}$$

négligeant le 3ème ordre et introduisant la relation $c_o^2 = \gamma \frac{p_o}{\tilde{\rho}_o}$, il vient

$$p = p_o - \frac{1}{2}\tilde{\rho}_o V^2 \tag{175}$$

Ce dernier résultat est celui que donne l'intégrale première de Bernoulli appliquée à un fluide incompressible de masse volumique $\tilde{\rho}_o$. Par conséquent, négliger dans le développement (174) les termes d'ordre supérieur à 2 revient à négliger la compressiblité du fluide. L'impact de cette remarque est intéressant car les fonctions de jauge du terme dominant du développement asymptotique cherché, seront celles de l'écoulement incompressible qui s'établit sur le nez de la parabole $Y^2 = \alpha_1^2 X$ osculatrice au nez du profil (cf. fin du paragraphe 6.1.). Ce problème et sa solution sont classiques. En effet, l'écoulement plan, stationnaire et irrotationnel d'un fluide parfait et incompressible autour d'une parabole d'équation $Y^2 = \alpha_1^2 X$ admet le potentiel des vitesses

$$(176) \qquad f(Z) = V_o \left(Z - \frac{\alpha_1^2}{4} - 2i\sqrt{Z - \frac{\alpha_1^2}{4}}\right) \quad , \quad Z = X + iY \quad , \quad V_o = Cte \ .$$

De cette relation il est facile de montrer que le champ des vitesses sur le nez de la parabole s'écrit

$$(177) \qquad \left[\begin{array}{ll} u = \dfrac{4\,V_o}{\alpha_1^4}\, Y^2 + O(Y^4) & (a) \\ \\ v = \dfrac{2\,V_o}{\alpha_1^2}\, Y + O(Y^3) & (b) \end{array}\right. \qquad \text{quand } Y \longrightarrow 0$$

La forme du terme dominant du champ des vitesses sur le nez du NACA 0012 étant donnée par (177), il convient de compléter par quelques termes en utilisant l'équation (170) du profil d'une part et en imposant entre u et v la condition de glissement sur ce dernier. Après quelques calculs, un peu longs, mais n'offrant pas de difficulté, on peut montrer que

$$(178) \qquad V^2 = V_1\, Y^2 + V_2\, Y^3 + V_3\, Y^4 + O(Y^5) \quad \text{quand} \quad Y \to 0 \quad (V_i = Ctes)$$

Utilisant (173), le résultat classique $c_o^2 = \frac{\gamma+1}{2}$ quand $C_* = 1$ et l'équation du profil, le comportement asymptotique de la pression, sur le nez du profil, s'écrit :

$$(179) \qquad \frac{p}{p_o} = 1 + C_1\, X + C_2\, X^{3/2} + C_3\, X^2 + O(X^{5/2}) \text{ quand } X \to 0 \ , \ (C_i = Cte).$$

La famille de répartitions de pression que nous allons déterminer devra satisfaire cette dernière relation.

6.3. Famille admissible de pressions.

L'allure de la distribution de pression $\frac{p}{p_o}$ donnée par l'expérience (voir figure 13) nous invite à chercher une solution du type "couche-limite"

en amont du pied de la caractéristique-limite. En effet, pour

- $X \in [0;0,15]$ son allure est celle d'une exponentielle décroissante,
- $X \in [0,15;0,5]$ son allure est celle d'une droite.

On peut montrer que la famille répondant aux conditions précédentes peut s'écrire

$$(180) \quad \frac{p}{p_o}(X) = 1 - (1 - \lambda_1 - \lambda_3) \frac{(1 - e^{-X/\lambda_2})}{(1 - e^{-\lambda_4/\lambda_2})} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X , \qquad X \in [0,\lambda_4]$$

les λ_i étant 4 paramètres devant satisfaire aux contraintes

$$(181) \quad 0 < \lambda_1 < 1 \ , \ \lambda_3 > 0 \ , \ \lambda_1 + \lambda_3 < 1 \ ; \ \lambda_4 > 0, \ \lambda_2 > 0 \text{ et } \lambda_2 = \mathcal{O}(1)$$

Pour que (180) représente une famille admissible elle doit, en outre, posséder le bon comportement (179) au voisinage du nez. Le développement de (180), pour $X \to 0$ et λ_i fixés, montre qu'il manque les termes en $X^{3/2}$ et $X^{5/2}$. Nous ajoutons, ces deux termes, d'où

$$(182) \quad \frac{p}{p_o}(X) = 1 - (1-\lambda_1-\lambda_3) \frac{(1-e^{-X/\lambda_2})}{(1-e^{-\lambda_4/\lambda_2})} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X + \lambda_5 X^{3/2} + \lambda_6 X^{5/2}$$
$$X \in [0,\lambda_4]$$

Cette dernière relation doit encore satisfaire

$$\frac{p}{p_o}(\lambda_4) = \lambda_1 \implies \lambda_6 = -\frac{\lambda_5}{\lambda_4}$$

En conclusion, une famille admissible de répartitions de pression, sur le NACA 0012, pourra être prise sous la forme

$$(183) \quad \frac{p}{p_o}(X) = 1 - (1-\lambda_1-\lambda_3) \frac{(1-e^{-X/\lambda_2})}{(1-e^{-\lambda_4/\lambda_2})} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} X + \lambda_5 (1 - \frac{X}{\lambda_4}) X^{3/2}, \ X \in [0,\lambda_4]$$

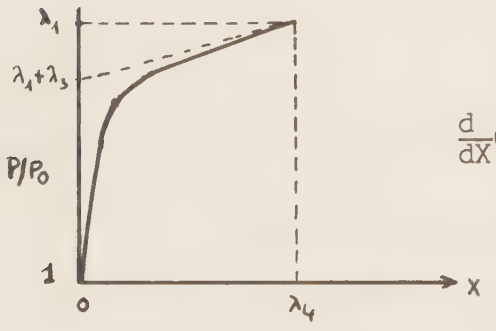
les paramètres λ_i devant satisfaire (181). Cette famille (183) a la forme requise et le bon comportement au nez du profil. En outre, elle dépend de 5 paramètres.

Une série d'essais sur machine dont les résultats essentiels sont rapportés en figure 14, nous a donné :

a) un encadrement (courbes (1) et (3)) du résultat expérimental (courbe (4))

b) un élément de la famille (183), représenté par la courbe (2), susceptible de servir de prédicteur pour la minimisation.

Pourtant, si séduisante que soit cette famille de pressions, elle convient mal à notre problème, comme nous avons pu nous en rendre compte lors de la résolution globale [50]. Cette famille (183) est apparue insuffisamment adaptée à la nature du problème traité. En effet, une étude de l'importance relative des paramètres λ_i entrant dans la famille (183) montre que certains paramètres jouent un rôle important à la fois près du nez et en supersonique.



En particulier, le paramètre λ_3 est directement lié à la pente de $\frac{p}{p_o}$ en supersonique $\frac{d}{dX}(\frac{p}{p_o}) \to -\frac{\lambda_3}{\lambda_4}$ au point (λ_4,λ_1), pour $\lambda_2 \to 0$ et $\lambda_5 \to 0$, tandis que près du nez il intervient par

$$\frac{p}{p_o} = 1 - \left[\frac{(1-\lambda_1-\lambda_3)}{\lambda_2} + \frac{\lambda_3}{\lambda_4}\right] X + \ldots \text{ pour } \left|\frac{\lambda_4}{\lambda_2}\right| >> 1 .$$

Nous avons déjà fait remarquer que le voisinage immédiat du bord d'attaque a une influence extrêmement sensible sur le reste de l'écoulement. L'importance de cette zone est telle que le paramètre λ_3 s'adapte au nez au détriment de la région supersonique. D'une façon générale, on peut dire que l'influence du nez du profil sur l'écoulement global mobilise presque tous les

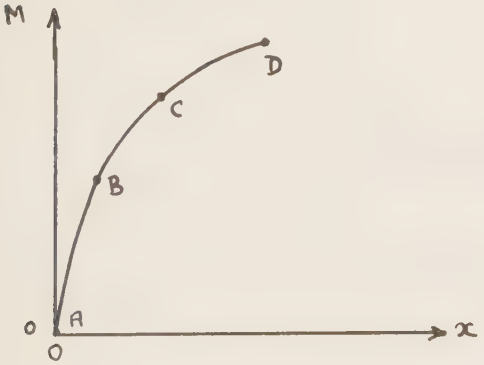
paramètres de la famille (183), laquelle devient alors trop restreinte pour réaliser une bonne adaptation sur le reste du profil.

De ces remarques, on peut tirer la règle pratique suivante : pour la construction d'une famille admissible, on a intérêt à faire intervenir des paramètres dont le rôle est prépondérant pour un arc bien déterminé de la courbe alors que sur la partie restante leur influence est négligeable.

C'est donc dans cet esprit que nous allons construire une nouvelle famille de pressions de sorte que soient rendues indépendantes les diverses régions du profil.

6.3.1. Elaboration définitive d'une nouvelle famille admissible de pressions.

L'observation de la courbe expérimentale fait apparaître trois régions essentielles :



a) la partie $\overset{\frown}{AB}$ correspondant à l'influence du nez du profil,

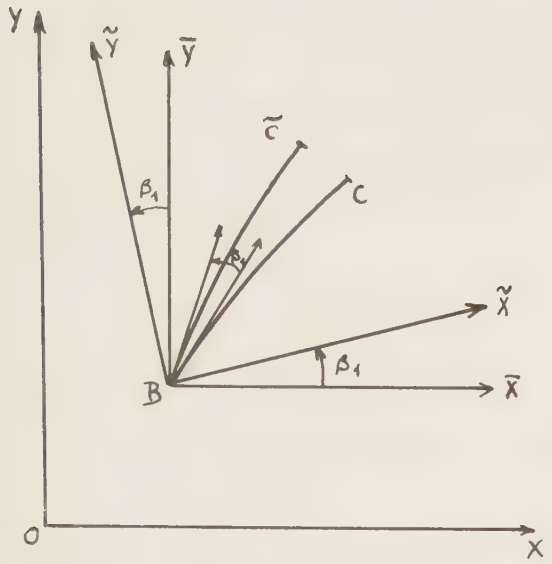
b) la partie $\overset{\frown}{BC}$ représentant la région sonique,

c) la partie $\overset{\frown}{CD}$ rendant compte de la partie franchement supersonique.

Une série d'essais numériques, voir en particulier [47], a montré que la famille (183) était bien adaptée pour la partie $\overset{\frown}{AB}$. Quant aux arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CD}$, nous les représenterons par des arcs de paraboles.

Déterminons les arcs de paraboles destinés à représenter $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CD}$.

Le travail pour $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CD}$ étant le même, les calculs ne seront menés que pour $\overset{\frown}{BC}$.



Conformément à la figure ci-contre, introduisons les systèmes d'axes orthonormés directs (O,X,Y), (B,$\bar{X}$,$\bar{Y}$) et (B,$\tilde{X}$,$\tilde{Y}$). Nous allons faire intervenir le paramètre angulaire β_1 défini par $\beta_1 = (\vec{\bar{X}},\vec{\tilde{X}})$.

Dans les axes (B,$\tilde{X}$,$\tilde{Y}$) écrivons l'arc de parabole sous la forme

$$\tilde{Y} = A_1 \tilde{X}^2 + B_1 \tilde{X} \quad , \tag{184}$$

avec A_1 et B_1 fixés, de sorte que l'arc de parabole $\widetilde{BC}$ s'obtienne à partir de l'arc de parabole $\widehat{BC}$ par une rotation plane d'angle β_1 autour du point B.

Quelques calculs permettent de montrer que, dans les axes (O,X,Y), (184) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\text{Si } \beta_1 \neq 0} \\ \\ Y(X) = \dfrac{-\left[2A_1(X-X_B)\cos\beta_1 \sin\beta_1 + B_1 \sin\beta_1 - \cos\beta_1\right] + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2A_1 \sin^2\beta_1} \quad , \varepsilon = \pm 1 \\ \\ \text{avec} \quad \varepsilon = \text{sgn}\,(B_1 \sin\beta_1 - \cos\beta_1) \quad \text{et} \\ \Delta = (B_1 \sin\beta_1 - \cos\beta_1)^2 - 4A_1(X-X_B)\sin\beta_1 \\ \\ \underline{\text{Si } \beta_1 = 0} \\ \\ Y(X) = A_1(X-X_B)^2 + B_1(X-X_B) + Y_B \end{array}\right. \tag{185}$$

La représentation de l'arc de parabole $\widehat{CD}$ se déduit de (185) par la transformation :

$$(X_B,Y_B) \longrightarrow (X_C,Y_C) \ , \quad A_1 \longrightarrow A_2, \ B_1 \longrightarrow B_2, \ \beta_1 \longrightarrow \beta_2 \tag{186}$$

Chaque arc de parabole dépend de 3 paramètres, par exemple : A_1, B_1 et β_1 pour l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

A ce niveau, et une fois choisies les abscisses des points B et C, la famille admissible de pressions sur le profil constituée des 3 arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CD}$ possède

- les 5 paramètres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 pour $\overset{\frown}{AB}$ (cf. (183))
- les 3 paramètres A_1, B_1, β_1 pour $\overset{\frown}{BC}$
- les 3 paramètres A_2, B_2, β_2 pour $\overset{\frown}{CD}$,

soit au total 11 paramètres, ce qui est beaucoup trop. Nous allons voir qu'il est raisonnablement possible d'extraire une famille à 4 paramètres seulement, convenant à notre problème.

La famille de distributions de pression donnée par (183) était destinée à représenter toute la partie $\overset{\frown}{AD}$ de la courbe. Il n'est pas étonnant qu'on puisse diminuer le nombre de paramètres pour représenter seulement l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Une suite d'essais numériques et une étude des ordres de grandeur montrent que sur $\overset{\frown}{AB}$ les paramètres qui interviennent effectivement sont λ_2 et λ_3. De sorte que sur $\overset{\frown}{AB}$ nous utilisons la représentation (183) en fixant les 3 paramètres λ_1, λ_4 et λ_5 à des valeurs notées λ_1°, λ_4° et λ_5° .

Enfin, on remarque que la distribution de pressions, sur des profils réalistes, changera en passant d'un profil à un autre, mais que l'allure générale de cette courbe restera sensiblement la même. C'est pourquoi il est raisonnable de fixer les quatre paramètres A_1, B_1, A_2 et B_2, c'est-à-dire d'imposer la courbure des deux arcs de paraboles $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CD}$, aux valeurs obtenues en astreignant chacun des arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CD}$ à passer par 3 points issus de la courbe expérimentale : respectivement B, C_1, C et C, D_1, D.

Nous prendrons les points C_1 et D_1 de la courbe expérimentale, respectivement entre BC et CD, il est classique de montrer que

$$(187)\quad \left[\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{(Y_{C_1}-Y_B)(X_C-X_B) - (Y_C-Y_B)(X_{C_1}-X_B)}{(X_{C_1}-X_B)(X_C-X_B)(X_{C_1}-X_C)} \\ B_1 = \dfrac{(X_{C_1}-X_B)^2(Y_C-Y_B) - (X_C-X_B)^2(Y_{C_1}-Y_B)}{(X_{C_1}-X_B)(X_C-X_B)(X_{C_1}-X_C)} \end{array}\right.$$

Les coefficients A_2 et B_2 se déduisent de (187) par la transformation

$$(188)\quad (X_B,Y_B) \longrightarrow (X_C,Y_C),\ (X_{C_1},Y_{C_1}) \longrightarrow (X_{D_1},Y_{D_1}),\ (X_C,Y_C) \longrightarrow (X_D,Y_D)$$

Du point de vue pratique, nous avons défini :

. l'arc $\overset{\frown}{AB}$ par $\{ M : M \in [0;0,8] \}$

. l'arc $\overset{\frown}{BC}$ par $\{ M : M \in [0,8;1,2] \}$

. l'arc $\overset{\frown}{CD}$ par $\{ M : M \in [1,2;1,3] \}$

M représentant le nombre de Mach.

Une série d'essais sur machine, dont les résultats essentiels sont rapportés en figure 15, nous a donné

a) un encadrement (courbe ① et ③) du résultat expérimental (courbe ④),

b) un élément de la nouvelle famille de pressions, dépendant des quatre paramètres λ_2, λ_3, β_1 et β_2, représenté par la courbe ②, s'approchant à moins de 1,7 % de la courbe expérimentale.

Nous observons encore que la nouvelle famille de pressions respecte bien la règle énoncée un peu avant le paragraphe 6.3.1.. De plus, du temps où

la répartition de pression était donnée par la famille à 5 paramètres (183), il nous était impossible d'interpréter le rôle joué par chaque λ_i car tous avaient de l'importance. Maintenant, avec la nouvelle famille, le rôle joué par chacun des paramètres, λ_2, λ_3 et β_1 et β_2 est bien clair.

En conclusion, nous avons choisi pour répartition de pression sur le profil, la famille admissible à 4 paramètres λ_2, λ_3, β_1 et β_2 :

sur $\widehat{AB}$, (2 paramètres λ_2, λ_3)

$$\frac{P}{P_o}(X) = 1-(1-\lambda_1^o-\lambda_3)\ \frac{(1-e^{-X/\lambda_2})}{(1-e^{-\lambda_4^o/\lambda_2})} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4^o} + \lambda_5^o\ (1-\frac{X}{\lambda_4^o})\ X^{3/2},\quad \forall\ X \in [0,X_B]$$

sur $\widehat{BC}$, (1 paramètre β_1)

si $\beta_1 \neq 0$

$$\frac{P}{P_o}(X) = \frac{-\left[2A_1(X-X_B)\cos\beta_1\ \sin\beta_1 + B_1\ \sin\beta_1 - \cos\beta_1\right] + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2A_1\ \sin^2\beta_1},\quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$\forall\ X \in [X_B,X_C]$$

avec $\quad sgn(\varepsilon) = sgn(B_1\ \sin\beta_1 - \cos\beta_1)$ et $\Delta = (B_1\sin\beta_1-\cos\beta_1)^2-4A_1(X-X_B)\sin\beta_1$

si $\beta_1 = 0$

$$\frac{P}{P_o}(X) = A_1(X-X_B)^2 + B_1(X-X_B) + Y_B$$

sur $\widehat{CD}$, (1 paramètre β_2)

se déduit de $\widehat{BC}$ par la transformation : $(A_1,B_1) \longrightarrow (A_2,B_2)$;

$\beta_1 \longrightarrow \beta_2$; $X_B \longrightarrow X_C$.

Les coefficients A_1, A_2, B_1, B_2 sont donnés par les relations (187) et (188).

Remarque:

Au cas où l'on voudrait raffiner le résultat, lors de la minimisation, il nous serait toujours possible de faire intervenir les paramètres A_i et B_i.

6.4. Famille admissible de caractéristiques-limites.

La détermination de la famille admissible de pressions, sur le profil, s'est appuyée sur des résultats expérimentaux très précis. Malheureusement, la caractéristique-limite ne peut être déterminée par voie expérimentale. Cependant, la méthode strioscopique donne la forme d'un certain nombre de caractéristiques. Visualisées par ce procédé, trois caractéristiques, notées ①, ② et ③, sont représentées en figure 16. Notons que le champ dessiné sur cette figure n'est donné qu'à titre indicatif, car les mesures de pression à la paroi de la soufflerie, qui sont à l'origine de ces résultats, sont grandement perturbées par l'interaction tridimensionnelle des couches-limites de profil et de paroi. Sur le profil, le pied de la caractéristique-limite expérimentale, noté P, peut être déterminé de la façon suivante. La caractéristique-limite est une caractéristique C^+ allant jusqu'à l'infini. Dans l'hodographe, son image est une Γ^+ d'équation

$$\theta = \frac{1}{\mu} \operatorname{Arctg}(\mu \sqrt{M^2-1}) - \operatorname{Arctg}(\sqrt{M^2-1}), \quad \mu = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} , \tag{189}$$

θ étant l'angle polaire de la vitesse avec l'axe des x. La relation isentropique

$$\frac{P}{P_o} = \left[1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right]^{-\gamma/(\gamma-1)} \tag{190}$$

jointe à (189), définit la pression sur la caractéristique-limite par une relation de la forme

$$\frac{P}{P_o} = f(\theta) \quad . \tag{191}$$

Grâce à l'équation du profil, la distribution expérimentale de pression, sur ce dernier, figure 13, peut être représentée en fonction de l'angle θ, par une équation du type

$$\frac{P}{P_o} = g(\theta). \tag{192}$$

L'intersection des courbes (191) et (192) fournit la pression $(\frac{P}{P_o})_P$ d'où l'abscisse X_P . Le procédé graphique qui vient d'être décrit nous a donné

$$X_P = 0{,}15 \quad , \quad (\frac{P}{P_o})_P = 0{,}385 \qquad \text{(voir figure 13).} \tag{193}$$

En tenant compte de ce résultat, la figure 16 met en évidence une conclusion intéressante. Deux caractéristiques d'une même espèce ne pouvant se couper, la caractéristique-limite expérimentale, issue du point P, sera très certainement encadrée par les caractéristiques (1) et (2). Nous pouvons donc en déduire, par interpolation, la forme probable de la caractéristique-limite expérimentale : elle sera convexe.

Pour construire la famille de caractéristiques-limites nous imposerons un certain nombre de conditions

a) elle doit quitter le profil avec le bon point de départ et la bonne tangente. C'est la notion de compatibilité entre les familles admissibles de pression et de caractéristiques-limites que nous avons introduite au paragraphe 5.2.,

b) son allure à l'infini doit être conforme à (125),

c) elle doit être convexe.

Nous avons déterminé une famille satisfaisant aux trois conditions a), b) et c). Elle dépend de deux paramètres P_1 et P_2 et s'écrit :

(194)
$$Y(X) = Y_C + (X-X_C)Y'_C + \frac{P_1}{4}(X_C-P_2)^{1/4}(X_C+4P_2-5X) + P_1(X-P_2)^{5/4}$$
$$\forall\ X \geq X_C$$
avec $P_1 > 0$ et $P_2 \leq X_C$

dans laquelle (X_C,Y_C) représente les coordonnées du pied, C, de la caractéristique-limite de la famille et Y'_C sa pente. Ces trois quantités sont connues dès que les 4 paramètres λ_2, λ_3, β_1 et β_2 de la famille admissible de pression sont fixés. Autrement dit, la famille (194) est subordonnée à la famille de pressions sur le profil. Rappelons enfin que X et Y sont définis par les relations (168), c'est-à-dire

$X = \frac{x-x_A}{\ell}$, $Y = \frac{y}{\ell}$, ℓ = corde du profil, x_A = abscisse du nez dans les axes (O,x,y).

6.4.1. Relations entre les paramètres P_1, P_2, a_1 et τ .

Ces relations seront déterminées en écrivant que le terme dominant du développement asymptotique (125) représentant la caractéristique-limite à l'infini, est identique au terme dominant de la famille (194) quand $X \to \infty$.

Le lien entre les variables naturelles $(\Omega,\bar{x},\bar{y})$ du développement asymptotique et (O,x,y) du plan physique a été donné au paragraphe 5.2., par

(195) $\bar{x} = x - \tau$, $\bar{y} = y$.

Dans les variables x, y le seul terme dominant de la caractéristique (125) s'écrit :

(196) $$x = \bar{A}\, y^{4/5} + \tau$$

et celui de la famille (194) est donné par

(197) $$x = P_1^{-4/5}\, \ell^{1/5}\, y^{4/5} + x_A + \ell\, P_2$$

Identifiant (196) et (197) et en tenant compte de la définition de $\bar{A}$ donnée dans l'annexe 1, on trouve les relations approchées

(198) $$a_1 \# \frac{2^9 . 3^3}{5^5} (\gamma+1)^{-5/3}\, \ell\, P_1^{-4} \qquad (a), \qquad \tau \# x_A + \ell\, P_2 \qquad (b)$$

Ces relations seront exploitées par la suite, au § 10.4.

Par ailleurs, nous allons effectuer le choix suivant : le paramètre τ, jusqu'ici arbitraire, sera choisi en sorte que le coefficient $\Lambda_{-2/5}$, intervenant dans les développements asymptotiques (120) et (125), soit nul.

Ces développements dépendent essentiellement de deux paramètres : au lieu que ce soit a_1 et $\Lambda_{-2/5}$ ce seront, dans le cas symétrique, a_1 et τ. Au niveau d'approximation retenu pour ces développements, ceci revient exactement au même, mais cette nouvelle manière de présenter les choses est plus commode.

Avec ce choix, et en notant

(199) $$D = (\bar{D})_{\Lambda_{-2/5}} = 0$$

le développement asymptotique de la caractéristique-limite, (125), s'écrit

(200) $$x - \tau = \bar{A}\, y^{4/5} + B\, y^{2/5} + D\, y^{0} + \ldots$$

pour un profil symétrique. Les coefficients $\bar{A}$, B et $\bar{D}$ étant donnés dans l'annexe 1, Ⓑ

Nota Bene : L'hypothèse $\Lambda_{-2/5} = 0$, et une étude des ordres de grandeur respectifs de $\overline{A}\, y^{4/5}$, $B\, y^{2/5}$, $D\, y^{0}$, permettent de justifier qu'on néglige ces deux derniers termes en (196) en vue de la comparaison avec (197), aboutissant ainsi aux formules approchées (198).

7. Résolution d'un problème de Cauchy elliptique-hyperbolique, non-linéaire, avec conditions aux limites.

Les paramètres des familles admissibles de pressions sur le profil et de caractéristiques-limites étant fixés, il s'agit de résoudre le problème (P_T) formulé au paragraphe 5.3.3.. Ce problème est un problème de Cauchy, elliptique-hyperbolique, non-linéaire (quasi-linéaire), avec conditions aux limites. Ce problème est difficile et nous procèderons par étapes :

7.1. Un problème de Cauchy, elliptique, est mal posé.

Un problème est bien posé, au sens de J. HADAMARD, s'il satisfait aux 3 conditions suivantes :

a) existence de la solution,

b) unicité de la solution,

c) dépendance continue de la solution par rapport aux données, pour des ordres de continuité (des topologies) raisonnables.

Or, un problème de Cauchy elliptique n'est pas bien posé au sens précédent. Considérons, par exemple, l'équation de Laplace bidimensionnelle avec données de Cauchy :

$$(201)\qquad \begin{cases} \Delta\varphi = 0 \qquad (a) \qquad \text{dans le demi-plan } x \geq 0 \\ \varphi(0,y) = \varphi_0(y) \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y) = \varphi_1(y) \qquad (b) \end{cases}$$

φ_o et φ_1 étant données sur la droite d'équation x = 0. Alors, si φ_o et φ_1 ne sont pas analytiques, c'est-à-dire développables en séries entières de la variable réelle $(y-y_o)$, au voisinage de chaque point y_o, il n'existe pas de solution au problème (201). Si φ_o et φ_1 sont analytiques, alors il existe un prolongement analytique unique, au moins jusqu'aux plus proches singularités. Cependant, comme nous le faisons observer dans la remarque terminant le paragraphe 5.3.3., ce prolongement analytique peut très bien croître au-delà de toute limite, pour des données initiales tendant vers 0, violant ainsi la condition c) précédente. Donnons, en effet, l'exemple, désormais classique, proposé par Jacques HADAMARD, au Congrès de la Société Mathématique Suisse qui s'est tenu à Zurich en 1917. Il prend pour le problème (201), les données de Cauchy suivantes

$$\varphi_o(y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_1(y) = A_n \sin(ny) \tag{202}$$

n étant un nombre très grand, mais A_n étant une fonction de n assujettie à être très petite quand n devient très grand (par exemple $A_n = \frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n^\rho}$ $(\rho>0)$ ou $e^{-\sqrt{n}}$). Ces données (202) diffèrent uniformément aussi peu que l'on veut de zéro. Cependant un tel problème de Cauchy a pour solution

$$\varphi(x,y) = \frac{A_n}{n} \sin(ny)\ \mathrm{sh}(nx), \tag{203}$$

laquelle est très grande pour toute valeur déterminée de x différente de zéro, à cause du mode de croissance de e^{nx} et par conséquent de sh(nx). Ceci démontre bien que le problème de Cauchy (201).(a) et (202) est mal posé. Ce phénomène est général pour les équations elliptiques.

Comparons cet exemple avec le problème de Cauchy pour l'équation des cordes vibrantes (du type hyperbolique)

$$(204)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 & \text{(a)} \\ \varphi(0,y) = \varphi_o(y) \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y) = \varphi_1(y) & \text{(b)} \end{cases}$$

dont la solution est

$$(205)\qquad 2\varphi(x,y) = \varphi_o(y+x) + \varphi_o(y-x) + \int_{y-x}^{y+x} \varphi_1(\tau)\, d\tau\ ,$$

pour $x > 0$. Cette solution, qui existe et est unique, dépend continuement des données $\varphi_o(y)$ et $\varphi_1(y)$. Maintenant, choisissons pour (204) les conditions de Cauchy fournies par (202), on obtient

$$(206)\qquad \varphi(x,y) = + \frac{A_n}{n} \sin(ny) \sin(nx),$$

comme cas particulier de la solution (205). Il est bien clair que contrairement à ce que donnait (203), la solution (206) du problème de Cauchy hyperbolique tend, elle, uniformément vers zéro quand n tend vers l'infini.

Remarques.

La solution (203) du problème de Cauchy elliptique montre que, plus l'oscillation contenue dans les données initiales est courte (n grand), plus vite elle s'amplifie pour $x \to +\infty$.

L'impact pratique de la non-satisfaction de la condition c) d'HADAMARD dans un problème de Cauchy elliptique est énorme, et a fait longtemps douter de la possibilité d'effectuer un prolongement analytique par voie numérique. En effet, la moindre oscillation des données initiales se trouve exponentiellement amplifiée, et les effets sur le calcul sont rapidement catrastrophiques.

Or, au bout de quelques pas d'intégration, on a déjà accumulé un stock d'erreurs de discrétisation et d'arrondi dont les composantes de Fourier de courtes longueurs d'onde vont s'empresser de croître en amplitude : le calcul "explose". C'est le phénomène d'instabilité bien connu des numériciens.

7.1.1. Possibilité de résoudre numériquement un tel problème.

Dans un livre rassemblant de nombreuses références, des justifications d'analyse fonctionnelle et une longue série d'essais numériques, LATTES et LIONS[25] montrent qu'on peut résoudre, dans un domaine limité, et avec une précision limitée, un problème mal posé du type indiqué ci-dessus. Sous diverses variantes (méthode de quasi-réversibilité dite "Q.R.", régularisation, pénalisation,...), l'idée est toujours la même : on modifie l'opérateur elliptique dans l'espace-temps en lui ajoutant ε fois un opérateur elliptique d'ordre plus élevé et portant seulement sur les variables d'espace, qui rend le problème parabolique, et étouffe les oscillations de courte longueur d'onde. Autrement dit, on approche le problème, mal posé, par une suite de problèmes paraboliques bien posés. On ne retient ainsi que l'allure générale des données initiales, à l'exclusion des oscillations dangereuses. Le paramètre ε doit être choisi assez grand pour réaliser ce but, mais pas trop, pour que le nouveau problème ressemble encore au problème initial que l'on s'était posé !... d'où la notion de paramètre optimal. Une valeur optimale de ε, obtenue par tâtonnement numérique, donne, dans une région limitée, le prolongement analytique cherché avec une précision limitée mais suffisante dans de nombreux cas pratiques.

Remarque.

On ne sera pas sans noter l'analogie avec la méthode de pseudo-viscosité introduite par Von NEUMANN et RICHTMYER, qui permet de remplacer un problème hyperbolique,par un problème parabolique pour traiter les ondes de choc.

Pour notre problème transsonique, nous avons adopté l'esprit de la méthode "Q.R", mais, aucun des schémas numériques proposés par LATTES et LIONS ne s'appliquant à nos équations mixtes non-linéaires, nous avons opté pour le schéma de Lax, dont l'intérêt, en transsonique, a été mis en évidence par BRATOS, BURNAT et PROSNAK [3]. Initialement introduit par P.D. Lax pour traiter des problèmes hyperboliques avec chocs, ce schéma très simple s'avère applicable aux problèmes elliptiques, ce qui en fait un schéma particulièrement adapté pour les problèmes mixtes.

Montrons comment le schéma de Lax se rattache à la méthode de Q.R.

Soient Δx et Δy les pas en x et en y, supposés positifs et constants. En adoptant la convention d'écriture $f_j^n = f(n\Delta x, j\Delta y)$, avec x jouant le rôle du temps, le schéma de Lax s'écrit :

$$(207)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^n \sim \dfrac{f_j^{n+1} - \frac{1}{2}\left[f_{j-1}^n + f_{j+1}^n\right]}{\Delta x} & \text{(a)} \qquad \forall f \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j^n \sim \dfrac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta y} & \text{(b)} \end{cases}$$

l'intégration s'effectuant selon les x croissants (voir figure 17).

Pour appliquer le schéma de Lax, écrivons le problème de Cauchy elliptique formulé en (201) sous la forme d'un système de deux équations du premier ordre en introduisant $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Et proposons nous d'appliquer le schéma de Lax au problème.

$$(208)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \text{pour } x \geq 0$$

avec les conditions initiales : $u(0,y) = u_o(y)$ et $v(0,y) = v_o(y)$

On obtient après quelques calculs

$$(209)\quad \begin{cases} u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\,(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta y}\,(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) & \text{(a)} \\ v_j^{n+1} = \frac{1}{2}\,(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + \frac{\Delta x}{2\Delta y}\,(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) & \text{(b)} \end{cases}$$

Nous avons un schéma explicite, à deux niveaux (n et (n+1)), consistant, du 1er ordre. Avec les notations de la figure 17, on voit que u(P), v(P), u(Q), v(Q) déterminent u(R), v(R). Les conditions initiales nous donnent le niveau 0, à partir duquel à l'aide de (209) on calcule le niveau 1, le niveau 2,..., le niveau n,... .

Il est facile de vérifier que (209) s'interprète comme la discrétisation au 2ème ordre, en différences centrées, du système

$$(210)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{cases} \qquad \text{avec } \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\Delta x + \frac{(\Delta y)^2}{\Delta x}\right) > 0$$

Appliquer le schéma de Lax à (208) revient bien à ajouter ε fois une dérivée seconde autrement dit à "**paraboliser**", conformément à la méthode de quasi-réversibilité. De plus, on réalise du même coup la régularisation et la discrétisation. On a, en quelque sorte, apporté une viscosité numérique qui n'est pas une vraie viscosité puisqu'elle tend vers 0 avec le pas. Nous dirons que le schéma de Lax introduit une pseudo-viscosité.

Il faut donc s'attendre à ce que la précision augmente lorsque $\Delta x \longrightarrow 0$ et $\Delta y \longrightarrow 0$, avec $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ fixé, jusqu'à un optimum , au-delà duquel la précision se met à diminuer très vite, la pseudo-viscosité devenant alors trop faible pour étouffer les oscillations parasites.

La stabilité du schéma peut s'étudier à l'aide de la matrice d'amplification $\mathcal{A}$. Donnons-nous les conditions initiales

$$(211)\quad \begin{cases} u(0,y) = u_o\, e^{i\omega y} \\ \\ v(0,y) = v_o\, e^{i\omega y} \end{cases} \qquad \text{avec } i^2 = -1 \quad , \qquad \omega = \text{cte réelle}$$

et regardons son évolution au bout d'un pas Δx. Le système aux différences (209) joint aux conditions (211), donne

$$(212)\quad \begin{pmatrix} u(\Delta x,y) \\ \\ v(\Delta x,y) \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} u(0,y) \\ \\ v(0,y) \end{pmatrix}$$

avec,

$$(213)\quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos(\omega\, \Delta\, y) & ; & -i\, \frac{\Delta x}{\Delta y} \sin(\omega\, \Delta\, y) \\ \\ i\, \frac{\Delta x}{\Delta y} \sin(\omega\, \Delta\, y) & ; & \cos(\omega\, \Delta\, y) \end{pmatrix}$$

Rappelons quelques résultats classiques figurant dans l'ouvrage de RICHTMYER et MORTON [34].

Définition.

On dit que la matrice d'amplification satisfait à la condition de Von NEUMANN si son rayon spectral est inférieur ou égal à 1 $\forall$ ω .

Théorème 1.

La condition de Von NEUMANN est nécessaire pour la stabilité.

Théorème 2.

Si la matrice d'amplification est normale, la condition de Von NEUMANN est nécessaire et suffisante pour la stabilité.

La matrice d'amplification $\mathcal{A}$ définie par (213) est normale puisque $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}^t$. La condition de Von NEUMANN est donc nécessaire et suffisante d'après le théorème 2.

Les valeurs propres de $\mathcal{A}$ sont données par

$$(214) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \cos(\omega \Delta y) + \dfrac{\Delta x}{\Delta y} \sin(\omega \Delta y) \\ \lambda_2 = \cos(\omega \Delta y) - \dfrac{\Delta x}{\Delta y} \sin(\omega \Delta y) \end{cases}$$

et de là :

$$\sup_{\omega} \left(\max_{i=1,2} |\lambda_i| \right) > 1 ,$$

de sorte que le schéma de Lax n'est pas stable au sens strict, pour l'équation de Laplace.

Toutefois, on peut faire deux remarques.

a) les oscillations en y de longueur d'onde très courte, c'est-à-dire très inférieure à Δy, ne sont pas saisissables sur la grille de discrétisation. On peut donc se contenter de considérer celles dont la demi - longueur est un multiple de Δy, soit $\omega \Delta y = \dfrac{\pi}{p}$, p étant un entier strictement positif.

b) si la discrétisation n'est pas trop fine, on pourra se contenter d'amortir les oscillations les plus courtes (p = 1,2,3,...)

La relation (214) montre que l'oscillation correspondant à p = 1 est amortie sans imposer de contrainte sur le rapport des pas en x et en y ; en revanche si p = 2,3,... les valeurs propres λ_1 et λ_2 imposent

$$(215) \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \leq F(p) \qquad \text{avec } F(p) = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{p})}{\sin(\frac{\pi}{p})} \quad ,$$

pour étouffer la $p^{ième}$ oscillation. La fonction F(p) est décroissante, et tend vers 0 quand p tend vers l'infini. En pratique, il suffit d'amortir les 4 ou 5 premières oscillations. La relation (215) nous fournit le rapport maximal admissible des pas en x et en y, soit $\frac{\Delta x}{\Delta y} \sim 0.4$.

La stabilité au sens mathématique est définie pour des pas tendant vers 0 ; on comprend bien pourquoi, dans ces conditions, il faille amortir toutes les oscillations. Or, du point de vue pratique, les pas, si petits soient-ils, sont, bien entendu, fixés à des valeurs non nulles. C'est la raison pour laquelle nous avons pu introduire cette notion de stabilité numérique, consistant à n'amortir qu'un petit nombre d'harmoniques ; nous l'avons appelée : pseudo-stabilité.

Remarque.

Quand les équations aux dérivées partielles sont linéaires mais à coefficients variables, ou bien a fortiori non-linéaires, on a peu de résultats généraux concernant la stabilité. L'idée directrice est d'abord de linéariser les équations (pour le non-linéaire !) puis d'étudier la stabilité locale de ces modèles simplifiés en supposant constants les coefficients déjà calculés, ensuite on utilise le théorème 1 et s'il y a lieu le théorème 2. Comme le signalent RICHTMYER et MORTON [34] la relation entre cette stabilité locale et la convergence est justifiée par l'expérience qui montre que les instabilités prennent toujours naissance comme phénomènes locaux. Nous avons pu constater sur les exemples que nous avons traités l'intérêt et le bien fondé de cette remarque.

7.1.2. Etude numérique du problème de Cauchy pur, puis du problème de Cauchy avec conditions aux limites, pour l'équation de Laplace.

Nous avons voulu contrôler par nous-mêmes, les considérations théoriques précédentes, en faisant réaliser, à Rennes, une série systématique d'essais sur des modèles possédant une solution exacte connue.

a) Problème de Cauchy pur pour l'équation de Laplace.

Les résultats qui suivent sont tirés du rapport de stage de F. et G. BROSSIER [4]. Les auteurs s'intéressent, du point de vue numérique, au problème suivant :

$$
(216)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \qquad \text{dans } \left[0,\infty\right[\times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ \text{avec les conditions initiales} \\ \left\{ \begin{array}{l} u(0,y) = \cos(y)\ \mathrm{ch}(\frac{1}{2}) \\ v(0,y) = -\sin(y)\ \mathrm{sh}(\frac{1}{2}) \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

dont on connaît la solution exacte,

$$
(217)\qquad u = \cos(y)\ \mathrm{ch}(x + \frac{1}{2}) \ , \qquad v = -\sin(y)\ \mathrm{sh}(x + \frac{1}{2})
$$

Leur but est d'étudier la possibilité de prolonger les conditions initiales grâce au schéma de Lax, puis de comparer avec la solution exacte (217), en jouant sur différents paramètres.

Nous savons que le schéma de Lax fait perdre 2 points en passant d'un niveau (n) au niveau (n+1) ; les données initiales étant portées par un segment borné de l'axe des y, on obtient le prolongement dans un triangle seulement, de sommet x_f. (voir figure 18).

Pour un nombre de pas fixé, la figure 19 donne l'influence de la pseudo-viscosité sur l'erreur de la solution numérique au point x_f. On voit très nettement apparaître un seuil, au-delà duquel le schéma diverge très rapidement. Enfin, il est intéressant de déterminer la région du plan des paramètres (nombre de pas, rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ des pas) pour laquelle le schéma converge, cette étude est consignée dans la figure 20. On observe en particulier que la condition $\frac{\Delta x}{\Delta y} < 1$ est un assez bon critère de stabilité. En se reportant à la formule (215), on constate que cette condition revient à amortir au moins 2 harmoniques. La partie hachurée de la figure 20 représente donc la région pour laquelle le prolongement numérique de la solution est possible.

On peut encore noter dans [4] que le calcul en double précision ne fait pratiquement rien gagner, les erreurs de discrétisation l'emportant sur les erreurs d'arrondis.

Enfin, il est montré que le procédé d'extrapolation à la limite qui fait passer d'un schéma du 1er ordre à un schéma du second ordre, fonctionne bien : d'une erreur de quelques pour cent , au point x_f, on tombe à quelques pour mille.

b) Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace, mais avec conditions aux limites.

Toujours pour tester le schéma de Lax, nous avons envisagé un problème de Cauchy avec des conditions aux limites pour l'équation de Laplace. Ce problème, mal posé s'il en est, fournit quand même des résultats réalistes. Nous avons traité le problème classique du jet, plan, incompressible, en coordonnées obliques, entre x_o et x_1 (voir la figure 21). Connaissant la solution exacte de ce problème, nous prenons sa trace, sur x_o, pour conditions initiales, et nous imposons les conditions classiques sur les lignes de jet : la condition

de glissement et la continuité de la pression. Sans entrer dans les détails disons qu'entre $x_o = 0.28$ et $x_1 = 1.3$, l'erreur relative est de 9 % sur l'ordonnée du jet, de 7 % sur la vitesse sur l'axe, ce qui correspond en x_1, à des erreurs absolues d'environ 0.018 et 0.014 respectivement.

7.2. Utilisation du schéma de Lax pour des équations mixtes, non-linéaires.

Lorsque des équations non-linéaires sont à discrétiser on a le choix entre

• écrire les équations sous forme conservative, auquel cas la discrétisation va de soi

• développer les équations : on discrétise alors les dérivées partielles comme pour les équations linéaires et l'on écrit les coefficients de ces dérivées soit au point M, soit en moyenne pondérée de P et Q (voir la figure 17).

De plus, les conditions de stabilité et de pseudo-stabilité peuvent être écrites sur le système localement linéarisé selon la remarque déjà faite à la fin du paragraphe 7.1.1.

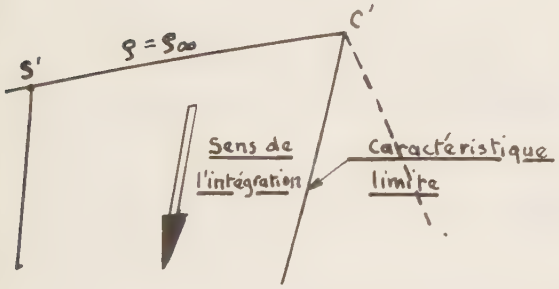
Nous avons contrôlé tout ceci sur de nombreux essais. L'application du schéma de Lax à une équation non-linéaire de type mixte, correspondant à un modèle de tuyère a été testé par F. et G. BROSSIER. Ces résultats, qu'on trouvera en [4], sont excellents tant en ce qui concerne la précision que la stabilité. Nous avons ainsi confirmé, et complété, les résultats de BRATOS, BURNAT et PROSNAK [3]. La meilleure confirmation en est d'ailleurs donnée par le problème inverse que nous avons résolu [44], [45].

7.2.1. Résolution d'un problème inverse.

Le véritable problème réel, clef de voûte de notre méthode, est celui de l'intégration du profil, donné, vers l'infini. C'est le problème formulé au paragraphe 5.3.3.. Mais avant de l'aborder, nous nous sommes pro-

posés de résoudre un problème de Cauchy, mixte, non-linéaire, en coordonnées curvilignes non orthogonales, pour lequel la caractéristique-limite n'est plus imposée et doit se "dessiner" d'elle-même. Nous avons donc imaginé le problème inverse suivant :

On se donne le développement asymptotique (113) pour un écoulement symétrique. Il s'agit alors de prolonger le dit développement asymptotique pour trouver un point de vitesse nulle, point de départ d'une ligne de courant interprétable comme un profil. Cette méthode inverse, (on ne connaît pas à l'avance la forme du profil qui va être obtenu), ne présente aucun intérêt du point de vue des applications mais a l'avantage de vérifier la valeur du schéma de Lax et celle du développement asymptotique pour l'écoulement à $M_\infty = 1$. D'une façon lapidaire : il est possible de "joindre les deux bouts", le profil et l'infini.



Sur la ligne $\rho = \rho_\infty$ appelons S' et C' les points de départ de la ligne sonique et de la caractéristique-limite. Le segment S'C' porte les données de Cauchy fournies par le développement asymptotique. Le problème étant hyperbolique entre la ligne sonique et la caractéristique-limite, si l'intégration s'effectue de la ligne ρ_∞ selon les ρ décroissants (voir le sens de la flèche sur la figure ci-dessus) l'écoulement sera déterminé dans la région hachurée limitée par la caractéristique la plus interne, autrement dit, la caractéristique-limite. C'est-à-dire que, pour ce problème inverse, la caractéristique-limite est libre et se dessinera d'elle-même. Pour la résolution numérique, nous avons utilisé le schéma de Lax, couplé, pour la condition sur la frontière transsonique, avec la méthode des caractéristiques. Ce couplage a été testé sur un modèle plus simple et purement

hyperbolique, dont on connaît une solution exacte, par F.GROSJEAN [19] . Nous reviendrons au paragraphe 7.3. sur cet exemple ; disons pour l'instant, et c'est là l'essentiel, que les résultats obtenus sont très bons.

7.2.1.1. Choix des coordonnées.

Les coordonnées que nous choisissons sont pratiquement celles définies par les formules (133), (134) et (135). Cependant, notre problème consiste à prolonger le développement asymptotique pour des $\mathcal{S}$ décroissants et finalement à obtenir un profil. Ce dernier n'étant pas connu d'avance, on ignore évidemment son équation $r_{\mathcal{S}} = F(\sigma)$. C'est pourquoi on définit la variable $\mathcal{S}$ par la relation (133).(b) en y faisant $F(\sigma) \equiv 0$. Ainsi, toutes les formules du paragraphe 5.3. sont-elles encore valables à condition d'y faire $F(\sigma) \equiv 0$. En particulier, les équations du mouvement s'écrivent toujours sous la forme

$$\frac{\partial X}{\partial \mathcal{S}} = \mathbb{D} \frac{\partial X}{\partial \eta} \quad ,$$ et la matrice $\mathbb{D}$ s'obtient à partir de l'annexe 2 en y faisant F et F' identiquement nulles. Les variables que nous utilisons dans ce problème inverse sont toujours notées $\mathcal{S}$, η et donc définies par

$$(218) \qquad \sigma = \pi - \theta \quad , \quad \mathcal{S} = r\, G(\sigma) \, , \quad \eta = \frac{\sigma}{\sigma_{CL}(\mathcal{S})} \, .$$

La relation (135) devient :

$$(219) \qquad x = - \frac{\mathcal{S}}{G(\sigma)} \cos \sigma \quad , \; y = \frac{\mathcal{S}}{G(\sigma)} \sin \sigma$$

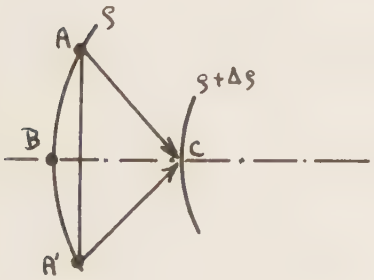
Des essais numériques ont montré qu'une ligne coordonnée $\mathcal{S}$ = cte circulaire convenait pour $\sigma \leq \frac{\pi}{2}$, mais était inadéquate pour $\frac{\pi}{2} < \sigma \leq \sigma_{CL}(\mathcal{S})$, la condition de Courant-Friedrichs-Lewy étant alors difficile à satisfaire. Nous avons choisi :

$$(220) \qquad G(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sigma \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \sigma & \text{si} \quad \sigma \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Une ligne de coordonnée ς = cte est donc constituée d'un quart de cercle pour $0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$, prolongé par une demi-droite. La fonction G définie par (220) satisfait bien aux conditions $G(\sigma) \neq 0$ comme le veut la relation (140), et G de classe C^1 comme l'imposent les équations du mouvement.

7.2.1.2. Introduction du schéma (S).

La condition de pseudo-stabilité introduite pour ce problème, si rudimentaire soit-elle, après coup, s'est fort heureusement révélée suffisante. A chaque niveau de discrétisation en ς , on détermine le pas $\Delta\varsigma$ suivant en imposant, sur l'axe des x seulement, la conditon de pseudo-stabilité du système localement linéarisé



$$|\Delta\varsigma^*| \leq y_A\sqrt{1-M_B^2} \Longleftrightarrow |\Delta\varsigma^*| \leq \frac{\varsigma}{G(\sigma_A)}\sin(\sigma_A)\sqrt{1-M_B^2}$$

On définit numériquement un coefficient de "sécurité" noté S et inférieur à 1 ; tenant compte de $G(\sigma_A) = 1$ on en déduit le pas

$$|\Delta\varsigma| = S \,.\, \varsigma \,.\, \sin(\sigma_A)\sqrt{1-M_B^2} \qquad S < 1 \tag{221}$$

Au cours de l'intégration numérique nous nous sommes aperçus que la condition (221) imposait des pas petits par rapport à ceux qu'on aurait pu faire en subsonique élevée ou en supersonique. De sorte que dans ces régions la "pénalisation" est trop forte et tend même à figer la vitesse. Sur la caractéristique-limite, elle stagne, ou même diminue un peu. Il faut donc dépénaliser dans cette région ou plus exactement ne pas mettre plus de pénalisation qu'il n'est nécessaire d'en mettre, à ce sujet on pourra consulter [50]. Pour réaliser cette condition, l'idée essentielle a consisté à combiner, avec un poids convenable, le schéma de Lax (L) qui est pseudo-stable,

en elliptique et stable en hyperbolique, avec un schéma (I) instable partout. Ici encore, l'équation de Laplace nous a guidés pour ce choix.

Hors son caractère instable, nous demandons au schéma (I) d'être simple, à deux niveaux, du premier ordre en x et du deuxième ordre en y, afin de respecter les principales qualités du schéma de Lax. Nous fûmes naturellement conduits à définir le schéma (I) par

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^n \sim \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j^n \sim \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta y} \end{cases} \qquad \forall f$$

avec des notations conformes à la figure 17.

Finalement, le schéma de discrétisation (S) retenu pour notre problème inverse est la combinaison linéaire convexe (S) = (1-α)(L) + α(I), $\alpha \in [0,1[$, représentée par

$$(222) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^n \sim \frac{1}{\Delta x} \left\{ f_j^{n+1} - \frac{(1-\alpha)}{2} \left(f_{j+1}^n + f_{j-1}^n\right) - \alpha f_j^n \right\} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \sim \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta y} \end{cases} \qquad \alpha \in [0,1[, \ \forall f$$

Pour bien comprendre le fonctionnement du schéma (S), appliquons le, à titre d'exemple, au problème (208). Les équations discrétisées s'écrivent cette fois

$$(223) \qquad \begin{cases} u_j^{n+1} = \frac{(1-\alpha)}{2} \left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + \alpha u_j^n - \frac{\Delta x}{2\Delta y} \left(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n\right) \\ v_j^{n+1} = \frac{(1-\alpha)}{2} \left(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n\right) + \alpha v_j^n + \frac{\Delta x}{2\Delta y} \left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \end{cases}$$

et pour les conditions initiales (211), la matrice d'amplification a la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha + (1-\alpha)\cos(\omega\,\Delta\, y) & ; & -i\,\frac{\Delta x}{\Delta y}\sin(\omega\,\Delta\, y) \\ i\,\frac{\Delta x}{\Delta y}\sin(\omega\,\Delta\, y) & ; & \alpha + (1-\alpha)\cos(\omega\,\Delta\, y) \end{pmatrix}$$

et admet les valeurs propres

$$\lambda_{\pm} = \left[\alpha + (1-\alpha)\cos(\omega\,\Delta\, y)\right] \pm \frac{\Delta x}{\Delta y}\sin(\omega\,\Delta\, y) \tag{224}$$

Conformément à ce qui a été dit à la fin du paragraphe 7.1.1., la condition de pseudo-stabilité se détermine en posant $\omega\,\Delta\, y = \frac{\pi}{p}$ en (224) et en imposant $\max(|\lambda_+|,|\lambda_-|) \leq 1$. Nous obtenons

$$0 \leq \alpha \leq 1 - \frac{\sin(\frac{\pi}{p})}{1-\cos(\frac{\pi}{p})}\,\frac{\Delta x}{\Delta y} \quad , \quad p = 2,3,\ldots \tag{225}$$

En particulier, choisissons $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{p})}{\sin(\frac{\pi}{p})}$, c'est-à-dire finalement le rapport maximum imposé par la pseudo-stabilité du schéma de Lax d'après (215), la relation (225) donne $\alpha = 0$. Dans ce cas on doit prendre une "dépénalisation" nulle. Au contraire, si $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ est très petit, voisin de zéro, on pourra prendre α voisin de 1 : c'est la dépénalisation maximale. Cette petite étude est confirmée par l'examen du terme de pseudo-viscosité introduit par le schéma (S). Un calcul élémentaire fournit

$$\varepsilon \sim \frac{1}{2}\left[\Delta x + (1-\alpha)\,\frac{(\Delta y)^2}{\Delta x}\right]$$

de sorte que la pseudo-viscosité diminue bien quand α croît. A l'aide du paramètre α, on peut donc contrôler la pseudo-viscosité. Des résultats numériques confirmant ce que nous venons de dire seront trouvés en [4].

Remarque concernant le schéma (I).

Les valeurs propres de la matrice d'amplification pour l'équation de Laplace, se déduisent de (224) en y faisant $\alpha = 1$. De sorte que la condition au pseudo-stabilité s'écrit :

$$(\alpha + (1-\alpha)\cos(\frac{\pi}{p}) + \frac{\Delta x}{\Delta y}\sin(\frac{\pi}{p}))_{\alpha=1} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \Delta x = 0$$

On peut montrer facilement que le schéma (I) appliqué à l'équation des ondes fournit, pour la matrice d'amplification, les valeurs propres $\lambda_{\pm} = 1 \pm i \frac{\Delta x}{\Delta y}\sin(\omega \Delta y)$, toutes deux de module supérieur à 1. En vertu du théorème 1 du paragraphe 7.1.1., le schéma est également instable en supersonique.

Finalement, pour notre problème inverse, nous avons adopté le schéma de discrétisation (S) défini par les relations (222). Signalons enfin qu'il se pose encore une question au sujet de l'intégration d'un problème non-linéaire par le schéma (S) : comment trouver le bon coefficient α en chacun des points du maillage ? Nous avons choisi de prendre a priori une loi linéaire reliant α à η.

Nota bene.

La condition de pseudo-stabilité (221) et la détermination du coefficient α de dépénalisation que nous avons appliquées à notre problème inverse,

sont encore rudimentaires. Ceci tient au fait que les résultats exposés dans ce paragraphe 7.2.1. sont les premiers que nous ayions obtenus en calcul numérique à $M_\infty = 1$. Ce travail a valeur d'exemple, son intérêt est non pas la précision, mais la possibilité de pouvoir prolonger numériquement le développement asymptotique pour obtenir un profil. En ce qui concerne la résolution du problème direct pour lequel des résultats quantitatifs et précis sont nécessaires, l'étude de la pseudo-stabilité et de la dépénalisation sera reprise avec grand soin au paragraphe 8.

7.2.1.3. Conditions sur la caractéristique-limite.

A chaque niveau d'intégration en $\mathcal{S}$, le schéma (S), tout comme le schéma de Lax, fait perdre un point du côté de l'axe de symétrie et un du côté de la frontière transsonique. Supposons que tout soit déterminé au niveau ς en chaque point de la discrétisation. La condition de pseudo-stabilité (221) nous donne le pas $\Delta\varsigma$ négatif, et il s'agit de trouver les inconnues u et v au niveau $\varsigma + \Delta\varsigma$. Alors :

• pour calculer les inconnues au point D de l'axe de symétrie, figure 22, selon une technique classique, on construit le point fictif A', à partir du point réel A, par symétrie (on pose $u(A') = u(A)$ et $v(A') = -v(A)$). Le schéma (S) peut alors être écrit, et permet de déduire les valeurs des inconnues en D à partir de leurs valeurs en A et A'. Ceci montre d'ailleurs que la condition de symétrie sur l'axe des x est, comme nous l'avions noté dans la remarque c) du paragraphe 5.2, une fausse condition aux limites,

• la caractéristique-limite intercepte la ligne $\varsigma + \Delta\varsigma = Cte$ en un point P inconnu, figure 23. De P est issue une caractéristique (C^-) qui coupe la ligne $\varsigma = Cte$ en un point S. Ce dernier ne sera pas, en général, sur le

deuxième point C de discrétisation, mais se trouvera entre les deux premiers points B et C, la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy étant satisfaite. La première démarche consistera à déterminer la position et les deux composantes de la vitesse au point S, c'est un problème d'interpolation. Tout étant connu aux points S et B, il faudra trouver la position et les composantes de la vitesse au point P : c'est une application de la théorie des caractéristiques.

Le schéma (S) étant un schéma au premier ordre, on pourrait penser appliquer la théorie linéarisée des caractéristiques, dont l'intérêt est de donner des formules explicites pour calculer la vitesse au point P. Cependant, nous n'avons pas procédé tout à fait de cette façon, et voici pourquoi : la caractéristique-limite et son voisinage se trouvent en supersonique léger de sorte que les caractéristiques sont bien "quasi-rectilignes" dans le plan physique, mais elles ont une forte courbure dans le plan de l'hodographe (u,v) figure 24. La linéarisation est bien justifiée dans le plan physique mais elle ne l'est plus dans l'hodographe. Profitant du fait que l'écoulement est plan et le système aux dérivées partielles réductible, nous utiliserons les équations exactes des $\Gamma^{\pm}$ dans l'hodographe.

Sur l'arc de caractéristique-limite $\overset{\frown}{PB}$ on a

$$(226) \qquad \frac{d\sigma}{d\varsigma} = \frac{Jv_2 + (g_{11}\, u_2 + g_{12}\, v_2)\ \mathrm{tg}\ A}{Ju_2 - (g_{12}\, u_2 + g_{22}\, v_2)\ \mathrm{tg}\ A} = \zeta_+ \ ,$$

et sur l'arc, $\overset{\frown}{PS}$, de C^-

$$(227) \qquad \frac{d\sigma}{d\varsigma} = \frac{Jv_2 - (g_{11}\, u_2 + g_{12}\, v_2)\ \mathrm{tg}\ A}{Ju_2 + (g_{12}\, u_2 + g_{22}\, v_2)\ \mathrm{tg}\ A} = \zeta_- \ ,$$

ces formules ont été obtenues en (153). Rappelons que u_2 et v_2 sont les compo-

santes contravariantes de la vitesse, le passage aux coordonnées cartésiennes s'effectuant sans difficulté à l'aide des relations (142).

Les quantités $\zeta_{\pm}$ seront prises au point B. La linéarisation de (226) et (227), justifiée dans le plan physique, donne

$$\sigma_P = \sigma_B + (\zeta_+)_B \, \Delta\varsigma, \quad \text{(a)} \qquad \text{, et} \qquad \sigma_S = \sigma_P - (\zeta_-)_B \, \Delta\varsigma \, , \quad \text{(b)} \tag{228}$$

D'où, en additionnant :

$$\sigma_S = \sigma_B + (\zeta_+ - \zeta_-)_B \, \Delta\varsigma \tag{229}$$

nous fournit la position du point S.

En tenant compte de (229), une interpolation linéaire entre les points B et C nous donne

$$\begin{cases} u_S = u_B + \dfrac{(\zeta_+ - \zeta_-)_B}{(\sigma_C - \sigma_B)} (u_C - u_B) \, \Delta\varsigma & \text{(a)} \\ v_S = v_B + \dfrac{(\zeta_+ - \zeta_-)_B}{(\sigma_C - \sigma_B)} (v_C - v_B) \, \Delta\varsigma & \text{(b)} \end{cases} \tag{230}$$

Rappelons que u et v sont les composantes cartésiennes de la vitesse.

A ce niveau, tout est connu au point S ; on connaît également la position du point P par (228)-(a). Il reste à trouver la vitesse en P. Appelons $\tilde{\theta}$ l'angle polaire de la vitesse avec l'axe des x, afin de ne pas le confondre avec l'angle polaire θ d'un point du plan physique comme nous l'avons considéré dans la définition de σ en (133). L'image Γ_B^+ de l'arc $\overset{\frown}{PB}$ de caractéristique-limite, figure 24, s'écrit

(231) $$\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_B = \left[\nu(M) - \nu(M_B)\right],$$

et l'image Γ_S^- de l'arc $\overset{\frown}{PS}$

(232) $$\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_S = - \left[\nu(M) - \nu(M_S)\right]$$

la lettre M représentant le nombre de Mach et la fonction ν

(233) $$\nu(M) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Arctg}(\mu\sqrt{M^2-1}) - \operatorname{Arctg}(\sqrt{M^2-1})$$

Le nombre de Mach M_P au point P est la racine, unique, du système constitué par les deux équations (231) et (232) dont la résolution numérique ne présente aucune difficulté. L'angle polaire $\tilde{\theta}$ de la vitesse s'en déduit alors grâce à (231), de sorte que les composantes cartésiennes de la vitesse au point P se calculent par les relations

(234) $$u_P = \sqrt{\frac{(\gamma+1)}{2+(\gamma-1)M_P^2}}\ M_P \cos(\tilde{\theta}_P), \quad v_P = \sqrt{\frac{(\gamma+1)}{2+(\gamma-1)M_P^2}}\ M_P \sin(\tilde{\theta}_P)$$

7.2.1.4. Procédure d'intégration.

Pour la discrétisation en η, nous avons choisi une loi parabolique $k(j)$, j étant le numéro de la ligne de discrétisation en η, fixée pour toute l'intégration. Supposons déterminées, en chaque point du maillage, les inconnues u et v sur la ligne ξ = Cte. Le pas en ξ est fixé par la relation (221) et la position du point P, figure 25, sur la ligne $\xi + \Delta\xi$ = Cte par (228).(a). La loi $k(j)$ d'une part et la valeur σ_P d'autre part imposent les points de discrétisation sur la nouvelle ligne $\xi + \Delta\xi$. Par les relations (234) la vitesse est connue au point P, et par le schéma de discrétisation (S) et la condition de symétrie évoquée au début du paragraphe 7.2.1.3., en tous les autres points du maillage de la ligne $\xi + \Delta\xi$.

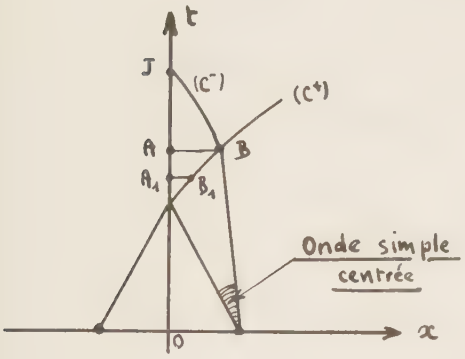
7.2.1.5. Résultats numériques.

La ligne de départ à été prise à $\mathcal{S}_\infty = 5$ et la constante a_1 intervenant dans le développement asymptotique, à 0,8292. Une des difficultés rencontrées échoit aux forts gradients de vitesse au voisinage du bord d'attaque, qui exigent un maillage localement très serré, alors que la position de celui-ci n'est pas connue d'avance. D'où la nécessité d'un long et délicat réglage pour amener la zone incompressible dans la région où le maillage est prêt à la "recevoir". A la suite de ces essais, nous avons été amenés à choisir $\tau = 0,5$. Dans le plan des variables $(\mathcal{S},\eta)$ nous prenons un double maillage afin d'effectuer une extrapolation à la limite. Nous avons utilisé un maillage 21 × 39, puis un maillage 41 × 77 et extrapolé ces deux résultats en 21 × 39 points. Après initialisation en $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\infty$, il en coûte seulement 21 s de calcul sur CII 10 070. La position du point de vitesse nulle, délicate à obtenir par une méthode inverse, est garantie à 1 % du trajet infini-bord d'attaque. On obtient un champ des vitesses et la frontière transsonique ; on trace la ligne sonique et le profil correspondant, figure 26. Toutes les quantités varient dans le bon sens, et leurs ordres de grandeur sont conformes aux résultats expérimentaux obtenus à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille.

7.3. Problème de Cauchy hyperbolique, non-linéaire, avec frontières libres, puis avec conditions aux limites imposées.

Cette situation se présente dans la partie hyperbolique du problème inverse ci-dessus, et du problème direct énoncé au paragraphe 5.3.3.. Aussi, dans une première étape, il était important de savoir si le schéma de Lax fonctionnait pour un problème de Cauchy hyperbolique avec des conditions aux limites. Dans cet esprit, F. GROSJEAN [19] a fait une étude numérique du couplage schéma de Lax-conditions aux limites sur le modèle d'écoulement unidi-

mensionnel, instationnaire, hyperbolique, de l'interaction de deux ondes simples dont la solution exacte est connue. Dans une première étude, il a envisagé le calcul dans le triangle curviligne ABJ, avec pour conditions de Cauchy sur AB, figure ci-contre, la trace de la solution exacte et une condition de symétrie sur AJ. C'est un problème bien posé. Ce problème est l'analogue de notre problème inverse infini → profil en ce qui concerne la partie hyperbolique.



Enfin, dans un deuxième temps, il a déterminé numériquement l'écoulement dans le domaine $A_1B_1\,B\,A$, avec pour conditions initiales la trace de la solution exacte sur $A_1\,B_1$ et pour conditions aux limites la condition de symétrie sur A_1A et la donnée exacte de l'arc $\widehat{B_1B}$ de C^+. Ce problème est l'analogue de notre problème direct intégration profil → infini, pour l'hyperbolique.

Pour ces deux problèmes d'ondes simples, la comparaison des résultats numériques avec la solution exacte montre bien la possibilité de résoudre des problèmes hyperboliques non linéaires, avec frontières libres ou bien avec des conditions aux limites imposées.

8. Etude de la stabilité et de la dépénalisation pour le problème direct.

Avant d'aborder cette étude, donnons une règle d'ordre général pour les écoulements transsoniques : la traversée d'une ligne sonique

i) parallèlement à la vitesse est impossible

ii) perpendiculairement à la vitesse est très facile

Ce résultat, constaté numériquement, et qui est à l'origine de l'échec d'un certain nombre de méthodes, peut être compris sur un modèle simple. Considérons un écoulement, de direction générale Ox, compressible, linéarisé au voisinage d'un état moyen dont la vitesse est U_o et le nombre de Mach M_o. Le champ des vitesses de perturbation est régi par le système

$$(235) \qquad \begin{cases} (1 - M_o^2)\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

qu'on décide d'intégrer dans le sens des x croissants.

L'application du schéma de Lax avec les conditions initiales (211) montre que les valeurs propres de la matrice d'amplification afférente à (235), s'écrivent

• <u>en subsonique</u>

$$(236) \qquad \lambda_{\pm}^{*} = \cos(\omega\,\Delta\,y) \pm \frac{\Delta x}{\beta^{*}\Delta y} \sin(\omega\,\Delta\,y), \quad \beta^{*} = \sqrt{1 - M_o^2} \leq 1$$

d'où la condition de pseudo-stabilité

$$(237) \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \leq F(p)\,\beta^{*}$$

Là où pour l'équation de Laplace on avait en (215) la condition de pseudo-stabilité $\Delta\,x \leq F(p)\,\Delta\,y$, on a désormais $\Delta\,x \leq F(p)\,\underline{\beta}^{*}\,\Delta\,y$, ce qui est bien sûr beaucoup plus exigeant

• <u>en supersonique</u>

$$(238) \qquad \lambda_{\pm} = \cos(\omega\,\Delta\,y) \pm i\,\frac{\Delta\,x}{\beta\,\Delta\,y} \sin(\omega\,\Delta\,y)\,, \quad \beta = \sqrt{M_o^2 - 1}$$

D'où :

$$|\lambda_-|^2 = 1 + \left[\frac{\Delta x^2}{\beta^2 \Delta y^2} - 1\right] \sin^2 (\omega \Delta y)$$

La condition de stabilité, stricte c'est-à-dire $\forall \omega$, s'écrit

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} \leq \beta = \operatorname{cotg} A = \left| \frac{dx}{dy} \right|_{\text{caractéristique}} \tag{239}$$

C'est la condition classique de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy. On en déduit immédiatement la proposition i). Inversement, si l'on intègre toujours selon les x croissants, mais si la direction générale de l'écoulement est maintenant celle de l'axe des y, β^* se trouve remplacé par $1/\beta^*$, et β par $1/\beta$, de sorte qu'on peut faire des pas arbitrairement grands lorsque M_o est voisin de 1, ce qui justifie la proposition ii). La comparaison des formules (237) et (239) montre qu'existe une certaine "continuité" entre la condition de Courant-Friedrichs-Lewy classique en hyperbolique, et la condition de pseudo-stabilité en elliptique. C'est d'ailleurs en mettant à profit cette remarque, que la condition de pseudo-stabilité, pour le problème inverse, a été écrite en (221).

Nous allons maintenant faire l'étude systématique de la stabilité et de la pseudo-stabilité pour le schéma (S) appliqué aux équations du mouvement du fluide, données au paragraphe 5.3.3. pour le problème (P_T).

8.1. Etude de la stabilité et de la pseudo-stabilité du schéma (S).

Un certain nombre d'essais numériques ont montré que la fonction $G(\sigma)$ définie au paragraphe 7.2.1.1. par la relation (220), était mal adaptée en supersonique pour le problème d'intégration profil → infini. C'est pourquoi

afin d'atteindre le maximum de généralités, il est bon de trouver des critères de stabilité et de pseudo-stabilité indépendants du choix de G. Ce choix sera fait ultérieurement.

Nous revenons aux coordonnées générales ξ et η définies au paragraphe 5.3.1. par les formules (133) et (134). La fonction $G(\sigma)$ intervenant dans ces coordonnées sera seulement astreinte, pour le moment, aux conditions

$$(240) \qquad G(\sigma) > 0 \qquad \sigma \in [0,\sigma_{MC}] \ , \qquad G \text{ de classe } C^1,$$

σ_{MC} étant la coordonnée σ du maître-couple du profil dont l'équation est $\xi = 0$; σ_{MC} constitue une majoration a priori de σ dans le domaine transsonique.

Le problème de l'intégration profil → infini formulé au paragraphe 5.3.3. montre que les équations du mouvement s'écrivent

$$(241) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = D_{11} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + D_{12} \dfrac{\partial v}{\partial \eta} & \text{(a)} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = D_{21} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + D_{22} \dfrac{\partial v}{\partial \eta} & \text{(b)} \end{cases}$$

les éléments D_{ij} de la matrice $\mathbb{D}$ sont toujours donnés dans l'annexe 2.

La discrétisation du système (241) par le schéma (S) défini au paragraphe 7.2.1.2. par les formules (222), fournit, après quelques calculs,

$$(242) \qquad \begin{cases} u_j^{n+1} = \dfrac{(1-\alpha)}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \alpha\, u_j^n + \dfrac{\Delta \xi}{2\Delta \eta} \left[D_{11}(u_{j-1}^n - u_{j+1}^n) + D_{12}(v_{j-1}^n - v_{j+1}^n) \right] \\ v_j^{n+1} = \dfrac{(1-\alpha)}{2} (v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + \alpha\, v_j^n + \dfrac{\Delta \xi}{2\Delta \eta} \left[D_{21}(u_{j-1}^n - u_{j+1}^n) + D_{22}(v_{j-1}^n - v_{j+1}^n) \right] \end{cases}$$

les éléments de la matrice $\mathbb{D}$ étant pris au point (j,n) conformément à la remarque du paragraphe 7.2. . Par commodité d'écriture l'élément D_{pq} de la matrice $\mathbb{D}$, pris au point (j,n), sera encore écrit D_{pq} au lieu de $(D_{pq})_j^n$. Dans le plan (η,ς), la numérotation est la suivante

- n est l'indice de la ligne ς de discrétisation, n ↗ quand ς ↗,
- j " " " η " " , j ↘ quand η ↗,

et le schéma (S) a été étudié pour des pas égaux en η, figure 27.

La matrice d'amplification du système (242), afférente aux conditions initiales harmoniques habituelles, s'écrit

$$(243)\qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha+(1-\alpha)\cos(\omega\,\Delta\,\eta)+i\,\frac{\Delta\varsigma}{\Delta\eta}\,D_{11}\,\sin(\omega\,\Delta\,\eta) & ; \; i\,\frac{\Delta\varsigma}{\Delta\eta}\,D_{12}\,\sin(\omega\,\Delta\,\eta) \\ i\,\frac{\Delta\varsigma}{\Delta\eta}\,D_{21}\,\sin(\omega\,\Delta\,\eta) & ; \; \alpha+(1-\alpha)\cos(\omega\,\Delta\,\eta)+ \\ & \quad + i\,\frac{\Delta\varsigma}{\Delta\eta}\,D_{22}\,\sin(\omega\,\Delta\,\eta) \end{pmatrix}$$

la lettre i représentant le symbole imaginaire $\sqrt{-1}$.

Désormais, afin de soulager l'écriture on posera

$$(244)\qquad t = \frac{\Delta\varsigma}{\Delta\eta} \qquad \text{et} \qquad \xi = \omega\,\Delta\,\eta$$

Le polynôme caractéristique de la matrice d'amplification (243), se met sous la forme

$$(245)\qquad \lambda^2 - 2\,\left\{\left[\alpha+(1-\alpha)\cos\xi\right] + i\,t\,\frac{(D_{11}+D_{22})}{2}\sin\xi\right\}\lambda + \det\mathcal{A} = 0$$

dont le discriminant Δ' s'explicite de la façon suivante

$$(246)\qquad \Delta' = -\delta'\,t^2\sin^2\xi$$

La lettre grecque δ' désignant le discriminant réduit de l'équation des directions caractéristiques du système aux dérivées partielles (241). Les expressions de δ' et de la pente des caractéristiques C^+ et C^-, dans le plan (η,ξ), sont données dans l'annexe 3. On remarque en passant que Δ' est indépendant de α, donc son expression est la même pour le schéma de Lax.

Les racines du polynôme caractéristique (245) vont être de nature différente selon le signe de Δ', donc finalement de δ'. Ceci n'est pas pour nous surprendre, puisque nous savons très bien que les conditions de stabilité sont très différentes en elliptique et en hyperbolique. Les ceux cas à étudier se présentent ici très naturellement.

8.1.1. Etude de la stabilité en supersonique.

En hyperbolique on a d'après l'annexe 3,

$\delta' = \dfrac{(D_{11}-D_{22})^2}{4} + D_{12}\,D_{21} > 0$ d'où la condition $\Delta' < 0$ en vertu de (246).

Dans ces conditions, le polynôme (245) admet les deux racines

$$(247) \qquad \lambda_{\pm} = \cos\xi + \alpha(1-\cos\xi) - i\,t\left[\frac{-(D_{11}+D_{22})}{2} \mp \sqrt{\frac{(D_{11}-D_{22})^2}{4} + D_{12}D_{21}}\right]\sin\xi$$

On peut observer avec profit que l'expression figurant entre crochets, dans la relation (247), représente très exactement les pentes $\zeta_{\mp}$ des caractéristiques dans le plan (ξ,η) d'après l'annexe 3. Ainsi, dans le cas hyperbolique les deux valeurs propres de la matrice d'amplification sont liées aux pentes des caractéristiques par

$$(248) \qquad \lambda_{\pm} = \cos\xi + \alpha(1-\cos\xi) - i\,t\;\zeta_{\mp}\sin\xi$$

La condition nécessaire de stabilité s'écrit

$$|\lambda_{\pm}|^2 \leq 1 \qquad \underline{\forall \xi}$$

soit

$$(1 - \cos \xi) \left\{ \left[t^2 \zeta_{\pm}^2 - (1-\alpha)^2 \right] \cos \xi + t^2 \zeta_{\mp}^2 + \alpha^2 - 1 \right\} \leq 0 \qquad \underline{\forall \xi}$$

La première parenthèse est toujours positive ou nulle, et la seconde est une fonction affine de cos ξ. On déduit donc très facilement la condition nécessaire de stabilité dans la zone supersonique, à savoir

$$\text{(249)} \qquad \frac{\Delta \mathcal{S}}{\Delta \eta} \leq (1-\alpha) \inf \left(\frac{1}{|\zeta_+|} , \frac{1}{|\zeta_-|} \right) \qquad \alpha \in [0,1[$$

les coefficients de la matrice $\mathbb{D}$ étant astreints à vérifier

$$\text{(250)} \qquad \frac{(D_{11} - D_{22})^2}{4} + D_{12} D_{21} > 0$$

Remarque.

Dans le cas du schéma de Lax, $\alpha = 0$, la signification de (249) est évidente, le point R, figure 27, doit être à l'intérieur du domaine de détermination de PQ. On retrouve la condition de Courant-Friedrichs-Lewy.

8.1.2. Etude de la pseudo-stabilité en subsonique.

Le domaine elliptique est caractérisé par la condition $\delta' < 0$ d'après l'annexe 3, d'où $\Delta' > 0$ en vertu de la relation (246). Les deux valeurs propres de la matrice d'amplification (243), notées $\lambda_{\pm}^{*}$, sont tirées de l'équation polynomiale (245). Elles sont égales à

$$(251)\qquad \lambda^{*}_{\pm} = \left[\alpha + (1-\alpha)\cos\xi\right] + t\left[i\,\frac{(D_{11}+D_{22})}{2} \pm \sqrt{\frac{-(D_{11}-D_{22})^2}{4} - D_{12}D_{21}}\right]\sin\xi$$

Par analogie avec l'hyperbolique, nous posons

$$(252)\qquad \zeta^{*}_{\pm} = i\,\frac{(D_{11}+D_{22})}{2} \pm \sqrt{\frac{-(D_{11}-D_{22})^2}{4} - D_{12}\,D_{21}}$$

Nous appelons cette quantité "pente des pseudo-caractéristiques".

Remarque.

1) Pour certains exemples, l'interprétation de la relation (252) est facile.

Reprenons d'abord le système (235) gouvernant l'écoulement linéarisé d'un fluide compressible. Les éléments de la matrice $\mathbb{D}$ ont $D_{11} = D_{22} = 0$, $D_{12} = -\frac{1}{(1-M_o^2)}$ et $D_{21} = 1$ de sorte que $\zeta^{*}_{\pm} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-M_o^2}}$. C'est bien le concept de pseudo-caractéristique qui a servi à écrire le critère de pseudo-stabilité en (221) pour le problème inverse. En supersonique on aurait trouvé $\zeta_{\pm} = \frac{\pm 1}{\sqrt{M_o^2-1}}$. Donnons encore l'exemple de l'écoulement d'un gaz compressible, au voisinage du col d'une tuyère d'axe x. Dans le cadre de l'approximation transsonique, la vitesse de perturbation est régie par le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{(\gamma+1)u}\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

d'où : $D_{11} = D_{22} = 0$, $D_{12} = \frac{1}{(\gamma+1)u}$ et $D_{21} = 1$ et de (252) on tire :

$$\zeta^{*}_{\pm} = \frac{\pm 1}{\sqrt{-(\gamma+1)u}}$$

quantité réelle en subsonique ($u < 0$). En supersonique, la pente des caractéristiques peut être trouvée à partir de la relation A_3-6 de l'annexe 3,

$\zeta_{\pm} = \dfrac{1}{\sqrt{(\gamma+1)u}}$, quantité réelle ($u > 0$ en supersonique).

2) On voit facilement que $|\zeta_+^*|^2 = |\zeta_-^*|^2 = \det \mathbb{D}$, cette valeur commune sera notée $|\zeta^*|^2$. Le module des pentes des pseudo-caractéristiques $|\zeta^*|$ est certainement non nul, car autrement on aurait $\text{Det } D = 0 \Longleftrightarrow D_{12}\, D_{21} = D_{11}\, D_{22}$ soit $\delta' = \dfrac{(D_{11} + D_{22})^2}{4} \geq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse d'ellipticité stricte, $\delta' < 0$, formulée au début de ce paragraphe. On a donc le résultat $|\zeta^*|^2 = \det \mathbb{D} > 0$.

La condition de pseudo-stabilité se traduit par des conditions auxquelles nous sommes maintenant habitués

$$|\lambda_{\pm}^*| \leq 1 \qquad \text{avec} \qquad \xi = \frac{\pi}{p} ,$$

p entier, strictement positif, fixé. On notera bien la différence entre notre définition de la pseudo-stabilité, en elliptique, où ξ est un paramètre fixé, et celle de la stabilité en hyperbolique pour laquelle la condition $|\lambda_{\pm}|^2 \leq 1$ doit être réalisée $\forall \xi$.

Des relations (251) et (252) nous déduisons

$$(253)\quad \varphi_{\pm}(t) \equiv |\zeta^*|^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right) t^2 \pm 2\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\left[\alpha+(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\right]\sqrt{|\zeta^*|^2 - \frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}}\, t +$$

$$+ \left[\alpha + (1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\right]^2 - 1 \leq 0 \quad , \; p = 1,2,3,\ldots, \quad \alpha \in [0,1[$$

Les fonctions trinômes φ_+ et φ_- admettent, chacune, deux racines de signes opposés . Nous noterons t_+^+ la racine positive de $\varphi_+ = 0$ et t_-^+ celle de $\varphi_- = 0$. La condition de pseudo-stabilité pour le problème direct s'écrit

$$0 \leq t \leq \inf(t_-^+, t_+^+)$$

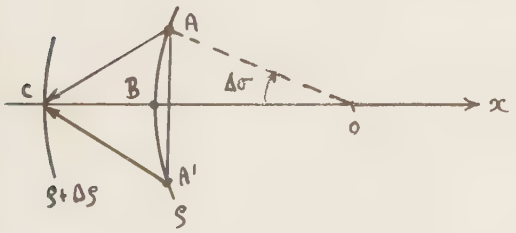
relation qui équivaut à

$$(254)\qquad 0 < \frac{\Delta\varsigma}{-\Delta\eta} < \frac{-\left[\alpha+(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\right]\sqrt{|\zeta^*|^2 - \frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}} + \sqrt{|\zeta^*|^2 - \frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}\left[\alpha+(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\right]^2}}{|\zeta^*|^2 \sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

$$|\zeta^*|^2 = \det \mathbb{D}, \quad \alpha \in [0,1[\ , \ p = 2,3,\ldots$$

car pour p = 1 la relation (253) est identiquement satisfaite.

Il est intéressant de voir ce que donne la condition de pseudo-stabilité (254), appliquée à la partie de l'axe de symétrie, située en amont du profil, c'est-à-dire pour $\sigma = 0$. De plus faisons l'hypothèse que la fonction G satisfait: (255) $G(0) = 1$ et $G'(0) = 0$. Dans ces conditions, les éléments de la matrice $\mathbb{D}$, sur l'axe $\sigma = 0$, se calculent en utilisant l'annexe 2. On trouve



$$(256)\qquad D_{11} = D_{22} = 0, \quad D_{12} = \frac{1-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)u^2}{(1-u^2)\sigma_{CL}(S)\left[S+F(0)\right]}, \quad D_{21} = \frac{-1}{\sigma_{CL}(S)\left[S+F(0)\right]},$$

dans la mesure où le profil est à bord d'attaque arrondi ($F'(0) = 0$). Sur l'axe des x, en amont du profil, on a certainement $u < 1$ et u inférieur à la vitesse limite donc $D_{12} > 0$. La partie de l'axe des x considérée, étant située

en amont de la ligne sonique, se trouve dans la région elliptique ce qui est cohérent avec $\delta' = D_{12}\, D_{21} < 0$. En tenant compte de (256), la relation de pseudo-stabilité (254) peut s'écrire :

$$(257) \qquad 0 \leq \frac{\Delta \varsigma}{\Delta \eta} \leq \frac{\{1 - [\alpha + (1-\alpha)\cos(\frac{\pi}{p})]\}}{\sin(\frac{\pi}{p})} [\varsigma + F(0)] \sigma_{CL}(\varsigma) \sqrt{1-M_x^2}$$

où M_x représente le nombre de Mach sur la partie de l'axe de symétrie, située en amont du profil. Cette dernière relation fournit

$$(257)' \qquad \Delta \varsigma = S \,.\, [\varsigma + F(0)]\, \Delta\sigma \sqrt{1-M_x^2} \;\; ; \;\; 0 \leq S \leq \frac{1-[\alpha + (1-\alpha)\cos(\frac{\pi}{p})]}{\sin(\frac{\pi}{p})} ,$$

laquelle, écrite au point B, voir figure ci-dessus, devient

$$(258) \qquad \Delta \varsigma = S \,.\, [\varsigma + F(0)]\, \sin(\sigma_A) \sqrt{1-M_B^2} + 0((\Delta\sigma)^3)$$

le terme $0((\Delta\sigma)^3)$ étant à négliger puisque notre schéma de discrétisation n'est que du 1er ordre en ς et du 2ème en η donc en σ.

On observera avec profit que la condition de pseudo-stabilité (259) est précisément celle utilisée en (221) pour traiter le problème inverse. En effet au paragraphe 7.2.1.1. on a posé $F(\sigma) \equiv 0$ et la relation (220) satisfait bien (255). Notons qu'à l'époque, la condition de pseudo-stabilité avait été introduite un peu empiriquement à l'aide de la notion de pseudo-caractéristiques et d'un coefficient de sécurité S. A posteriori, la relation (221) se trouve justifiée et la relation (257)' précise le coefficient S.

8.2. Etude de la dépénalisation automatique.

Rappelons rapidement pourquoi nous avons besoin du schéma (S) et non du schéma de Lax, pour résoudre le problème de l'intégration profil → infini. Supposons, pour un instant, que nous utilisions le schéma de Lax. Pour bien nous

faire comprendre, plaçons-nous dans la région hyperbolique. Les conditions de stabilité à respecter sont données par la relation (249) en y faisant $\alpha = 0$, et doivent être appliquées en chaque point de discrétisation. Sur la figure 28 nous avons représenté, à titre d'exemple, trois triangles caractéristiques pour lesquels la condition de stabilité est satisfaite si l'on prend le pas $\Delta S = \inf_j (A_j C_j)$.

Du fait qu'on veut utiliser un maillage orthogonal dans le plan (η, S), pour le premier triangle, on fera le pas $A_1 B_1$, alors qu'on pourrait pratiquement faire le pas $A_1 B_1'$. On "surpénalise" cette région. La pseudo-viscosité introduite par le schéma de Lax, juste suffisante dans certaines régions pour assurer la stabilité, est surabondante dans d'autres régions du domaine de calcul. Il faut donc contrôler cette pseudo-viscosité. Pour réaliser cette condition nous avons à notre disposition deux possibilités :

(a) jouer sur le schéma de discrétisation

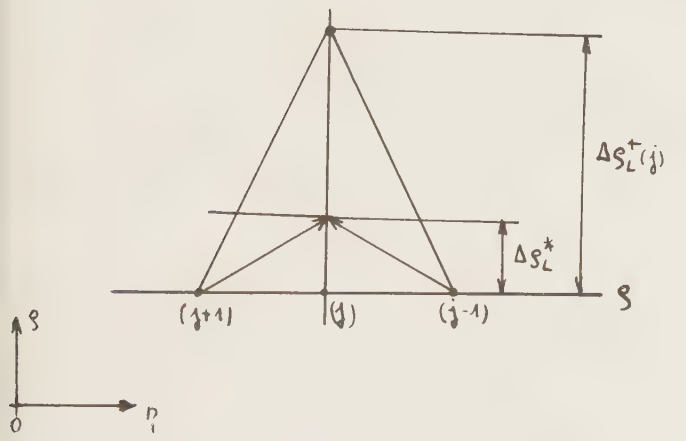
(b) jouer sur la fonction G afin que les lignes coordonnées S = cte "s'évasent" dans la région supersonique.

Nous avons retenu et mis en application ces deux idées.

8.2.1. Choix du paramètre α intervenant dans le schéma (S).

Supposons tout connu en chaque point (j) de discrétisation de la ligne S = cte, (j) variant de 1 (frontière transsonique) à (N+1) (partie de l'axe de symétrie située en amont du profil). En chaque point (j) on applique la condition de stabilité (249) ou de pseudo-stabilité (254) suivant que ce point est en hyperbolique ou en elliptique. Le problème consiste à déterminer $\alpha(j)$ pour assurer la dépénalisation optimale.

Notations (figure ci-dessous).



$\Delta\varsigma_L^+(j)$ = pas maximum pour avoir la stabilité au point (j) de la ligne ς = cte, en utilisant le schéma de Lax.

$\Delta\varsigma_L^*$ = pas maximum qui sera effectivement fait, pour avoir la stabilité en tout point (j) de ligne ς = cte pour le schéma de Lax.

$\Delta\varsigma_S^+(j)$ = pas maximum pour avoir la stabilité au point (j) de la ligne ς = cte, en utilisant le schéma (S).

D_{pq} = éléments de la matrice $\mathbb{D}$ pris au point (j) de la ligne ς = cte.

8.2.1.1. Etude du cas hyperbolique.

La condition de stabilité pour le schéma de Lax s'obtient à partir de la relation (249) en y faisant $\alpha = 0$, d'où :

$$(259) \qquad \Delta\varsigma_L^+(j) = \Delta n(j) \inf\left(\frac{1}{|\zeta_+|}, \frac{1}{|\zeta_-|}\right) \qquad j \in \mathcal{J}_H \subset \{2,\ldots,(N+1)\} = \mathcal{N}$$

$\mathcal{J}_H$ étant l'ensemble des points (j) de la ligne ς = cte pour lesquels nous sommes en hyperbolique.

Bien évidemment :

$$(260) \qquad \Delta\varsigma_L^* = \inf_{j\in\mathcal{N}} \Delta\varsigma_L^+(j) \quad (a) \quad \text{et} \quad \Delta\varsigma_L^* \leq \Delta\varsigma_L^+(j) \quad (b)$$

et c'est ce $\Delta\varsigma_L^*$ ainsi calculé, qui sera le pas en ς que nous ferons effectivement pour passer de la ligne de discrétisation à la suivante, aussi bien en hyperbolique qu'en elliptique (i.e. : dans (260), j court sur $\mathcal{N}$).

Entre $\Delta s_S^+(j)$ et $\Delta s_L^+(j)$ on a la relation

$$\Delta s_S^+(j) = (1-\alpha)\ \Delta s_L^+(j) \qquad \alpha \in [0,1[$$

Pour avoir la pénalisation minimale au point (j), il faut choisir α, noté $\alpha(j)$ pour des raisons évidentes, de sorte que $\Delta s_S^+(j) = \Delta s_L^*$

Cette condition nous donne

$$\alpha(j) = 1 - \frac{\Delta s_L^*}{\Delta s_L^+(j)} \quad , \quad \forall\ j \in \mathcal{J}_H \tag{261}$$

et elle satisfait bien $\alpha(j) \in [0,1[$

Les points $(j) \in \mathcal{J}$, pour lesquels le pas maximum $\Delta s_L^+(j)$, qu'il est possible de faire, est précisément celui qu'on effectue Δs_L^* (c'est le cas du point A_3 de la figure 28), la relation (262) implique $\alpha(j) = 0$. En revanche, pour le point A_1 de la figure 28, on a $\Delta s_L^* = \Delta s = A_1 B_1 = 20$mm et $\Delta s_L^+(A_1) = A_1 B_1' = 70$ mm, le coefficient α donnant la pénalisation minimale en ce point vaut $\alpha(A_1) = \frac{5}{7}$.

8.2.1.2. Etude du cas elliptique.

La démarche est exactement la même que pour l'hyperbolique, mais on applique cette fois la condition de pseudo-stabilité (254), d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta s_L^+(j) = \dfrac{-\cos(\frac{\pi}{p})\sqrt{|\zeta^*|^2 - \dfrac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}} + \sqrt{|\zeta^*|^2 - \dfrac{(D_{11}+D_{22})^2 \cos^2(\frac{\pi}{p})}{4}}}{|\zeta^*|^2 \sin(\frac{\pi}{p})}\ \Delta n(j) \\ \text{avec}\ \ j \in \mathcal{J}_E = \mathcal{N} - \mathcal{J}_H \ , \quad |\zeta^*|^2 = \det \mathbb{D} \ , \ p = 2,3\ldots \ , \end{array} \right. \tag{262}$$

de même

$$(263)\quad \begin{cases} \Delta\varsigma_S^+(j) = \dfrac{-E(\alpha)\sqrt{|\zeta^*|^2 - \dfrac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}} + \sqrt{|\zeta^*|^2 - \dfrac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}E^2(\alpha)}}{|\zeta^*|^2 \sin(\frac{\pi}{p})} \Delta n\,(j) \\ E(\alpha) = \alpha + (1-\alpha)\cos(\frac{\pi}{p}) \quad , \quad j \in \mathcal{Y}_E \quad , \quad p = 2,3,\ldots, \end{cases}$$

Ici encore, le coefficient α donnant la pénalisation minimale au point (j), soit $\alpha(j)$, sera trouvé en écrivant que $\Delta\varsigma_S^+(j)$ donné par (263) est égal à $\Delta\varsigma^*_L$ fourni par (260).(a). Alors, des relations (262) et (263) il est facile de voir que $\alpha(j)$ doit être solution de

$$(264)\quad -E(\alpha)\sqrt{|\zeta^*|^2 - \frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}} + \sqrt{|\zeta^*|^2 - \frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}E^2(\alpha)} - \{\cos(\tfrac{\pi}{p})\sqrt{|\zeta^*|^2 - \frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}} + \sqrt{|\zeta^*|^2 - \frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}\cos^2(\tfrac{\pi}{p})}\} \frac{\Delta\varsigma^*_L}{\Delta\varsigma^+_L(j)} = 0$$

Tout étant supposé connu en chaque point de discrétisation de la ligne ς = Cte, la matrice $\mathbb{D}$ est déterminée en ces points, et par les relations (260).(a) et (262) nous avons $\Delta\varsigma^*_L$ et $\Delta\varsigma^+_L(j)$, une fois choisi le nombre p d'oscillations à amortir.

La relation (264) est bien une équation en α. En tenant compte de la relation d'ellipticité $\delta' = \frac{(D_{11}-D_{22})^2}{4} + D_{12}\,D_{21} < 0$, on peut montrer que l'équation (264) admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0,1]$. Elle s'écrit :

(265)
$$\alpha(j) = \frac{-P(j)\sqrt{|\zeta^*|^2 - \frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}} + \sqrt{|\zeta^*|^4 - P^2(j)\,\frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}} - |\zeta^*|^2 \cos(\frac{\pi}{p})}{\left[1 - \cos(\frac{\pi}{p})\right] |\zeta^*|^2}$$

avec

$$P(j) = \left[\sqrt{|\zeta^*|^2 - \frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}\cos^2(\frac{\pi}{p})} - \sqrt{|\zeta^*|^2 - \frac{(D_{11}+D_{22})^2}{4}\cos(\frac{\pi}{p})}\right] \frac{\Delta\varsigma_L^*}{\Delta\varsigma_L^+(j)}$$

$$|\zeta^*|^2 = \det \mathbb{D}, \quad p = 2,3,\ldots, \quad j \in \mathcal{Y}_E$$

Du point de vue pratique, on calcule tous les $\Delta\varsigma_L^+(j)$ à l'aide des formules (249) et (254) pour $\alpha = 0$, puis $\Delta\varsigma_L^* = \inf_j (\Delta\varsigma^+(j))$, enfin tous les $\alpha(j)$ par (261') et (265).

Ce sont les lois de dépénalisation trouvées en (261) et (265) qui ont été appliquées à notre problème d'intégration profil $\longrightarrow$infini.

Pour simplifier les notations, le pas $\Delta\varsigma_L^*$ sera désormais noté $\Delta\varsigma$.

8.3. Choix de la fonction G.

Théoriquement, la fonction G intervenant dans le changement de variables (135) est astreinte aux seules conditions

(i) $G(\sigma) > 0 \qquad \forall\, \sigma \in [0, \sigma_{M-C}]$

(ii) $G(\sigma)$ de classe C^1, dans $[0, \sigma_{M-C}]$

Rappelons que σ_{M-C} détermine la position du maître-couple sur le profil. Bien entendu, quelle que soit la forme de la fonction G satisfaisant à (i) et (ii), les conditions de stabilité , de pseudo-stabilité et la dépénalisation fonctionneront. De fait, il serait maladroit de choisir G au hasard, sans aucune considération pour la géométrie et la nature physique de l'écoulement.

A titre d'exemple, envisageons deux fonctions $G_1(\sigma)$ et $G_2(\sigma)$ donnant respectivement les images des lignes $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_1 + \Delta\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_2 + \Delta\mathcal{S})$ représentées sur les figures 29.(a) et (b).

Nous avons dessiné dans chacun des cas 2 cas, un triangle caractéristique. Pour un même pas $\Delta\mathcal{S}$, la fonction $G_1(\sigma)$ permet de faire dans le plan plysique la longueur $B_1\ D_1$ alors que la fonction $G_2(\sigma)$ donne seulement $B_2\ D_2$ pour pratiquement le même $\Delta\mathcal{S}_L^+ = B_1\ E_1 \simeq B_2\ E_2$. La fonction G_2 apporte un excédent de pénalisation qui sera bien sûr neutralisé par le coefficient α de dépénalisation. Toutefois, les pas dans le plan physique seront petits de sorte que pour atteindre en hyperbolique une distance raisonnable du profil, il faudra accomplir un très grand nombre de pas d'où cumul d'erreurs et coût du temps de calcul augmenté.

Aussi, afin d'éviter les mésaventures de l'exemple précédent, nous avons exigé que la fonction G donne des images de $\mathcal{S}$ = cte, dans le plan physique, qui soient

a) d'allure parabolique, afin de ne pas aller à l'encontre de la loi de similitude transsonique, ce qui serait le cas pour la figure 29.(b)

b) à tangentes verticales sur la partie amont de l'axe de symétrie, car le profil est à bord d'attaque arrondi.

Pour déterminer G, nous avons imposé qu'en négligeant le profil, les lignes $\mathcal{S}$ = cte soient rigoureusement des paraboles du type

$$y^2 = 2\mathcal{S}(x + \mathcal{S})$$

Cette relation conduit à choisir

$$(266) \qquad G(\sigma) = \frac{\cos\sigma + \sqrt{1 + \sin^2\sigma}}{2} \quad , \quad \sigma \in [0, \sigma_{M-C}]$$

fonction qui répond à toutes les conditions exigées. Notons enfin que pour un profil de forme fixée, les lignes coordonnées $\mathcal{S}$ = cte sont universelles. La figure (30) présente un réseau de lignes $\mathcal{S}$ = cte obtenues pour le NACA 0012.

Ces lignes coordonnées sont très bien adaptées au problème. En effet

(i) elles sont de forme circulaire au voisinage de l'axe des x. Ce qui signifie, en particulier, qu'au voisinage du nez, là où les gradients de vitesse sont importants, elles ne s'éloignent pas sensiblement de la forme du bord d'attaque,

(ii) on observe, pour $\sigma \geq \frac{\pi}{2}$, que pour un même accroissement en $\mathcal{S}$, elles s'écartent davantage près du profil que loin de celui-ci. Cet aspect est particulièrement intéressant car près de l'obstacle, le pas en $\mathcal{S}$, conditionné par l'écoulement au bord d'attaque est très petit.

8.4. Exemple de dépénalisation automatique.

Illustrons en appliquant à un exemple concret, les considérations de ce paragraphe 8. A cet effet, nous donnant, en figure 31, les variations du paramètre de dépénalisation α en fonction de la variable η, pour différentes lignes $\mathcal{S}$ = cte obtenues en utilisant la fonction $G(\sigma)$ définie en (266). La figure 32 précise l'évolution du nombre de Mach en fonction de η, sur la ligne $\mathcal{S}$ = 0.77. Toutes ces courbes sont extraites d'essais numériques dont les résultats finaux ont été présentés en [48] et [50].

Les trois courbes $\alpha(\eta)$ présentant la même allure générale, raisonnons, pour fixer les idées, sur celle afférente à $\mathcal{S}$ = 0.77.

La région faiblement subsonique OA, apparaît comme étant celle qui doit être la moins dépénalisée. De sorte que le voisinage de l'axe des x se présente comme étant le plus exigeant pour le pas en $\mathcal{S}$. En particulier

la dépénalisation minimale, $\alpha = 0$, est atteinte sur l'axe des x ($\eta = 0$) :

$$\Delta\varsigma = \inf_{j \in \mathcal{N}^0} (\Delta\varsigma_L^+(j)) = \Delta\varsigma_L^+(N+1).$$

Au contraire, en subsonique élevé et en supersonique, la partie BC de la courbe montre clairement qu'il est nécessaire d'introduire un coefficient de dépénalisation, α, important ; α atteint sa valeur maximale au point sonique S. Sur l'arc SC, le rapport $\frac{\Delta\varsigma}{\Delta\varsigma_L^+}$ reste inférieur à 0.2 d'après la relation (262). Ainsi, en supersonique, le pas, en ς, $\Delta\varsigma$ effectué est au minimum 5 fois plus petit que celui qui pourrait être accompli.

Toutes ces constations confirment bien, comme nous l'avions déjà annoncé, que le schéma de Lax introduit une pénalisation qui peut être très importante dans certaines régions de l'écoulement. D'où, à l'évidence même, la nécessité d'utiliser le schéma (S). Signalons enfin que le coefficient de dépénalisation α joue parfaitement son rôle : il dépénalise là où il le faut, tout en respectant la stabilité et la pseudo-stabilité.

Arrivé au terme de ce paragraphe 8, nous pouvons mesurer les progrès accomplis depuis l'intégration du problème inverse (paragraphe 7.2.1.). A l'époque, au lieu d'écrire systématiquement la condition de stabilité et de pseudo-stabilité en chacun des points du maillage, on l'imposait en un point supposé le plus exigeant et afin d'obtenir une majoration uniforme des pas en ς, on multipliait par un coefficient de sécurité $S < 1$. En ce qui concerne la dépénalisation nous avions choisi une loi linéaire entre α et η. La figure 31, montre que cette loi linéaire était loin d'être optimale.

9. Procédure d'intégration pour le problème (P_T).

Il s'agit de résoudre le problème (P_T) énoncé à la fin du paragraphe 5.3.3, pour lequel

(i) les conditions initiales sont fournies par la famille admissible de répartition de pression, donnée au paragraphe 6.3.1., et par l'équation du profil considéré

(ii) la condition aux limites sur la frontière transsonique est imposée par la famille admissible de caractéristiques-limites (194),

une fois un prédicteur choisi.

Les conditions de stabilité et pseudo-stabilité, la dépénalisation automatique et la fonction G, utilisées sont données au paragraphe 8 par les relations (249), (254), (261), (265) et (266).

Cette précision étant apportée, donnons la procédure d'intégration du profil vers l'infini. Un prédicteur étant choisi, les composantes cartésiennes de la vitesse sont connues en tous les points η_j du maillage, sur la ligne de départ $\varsigma = 0$. Les conditions de stabilité et de pseudo-stabilité déterminent, alors, le pas en ς noté $\Delta\varsigma^{(1)}$, voir figure 33. Les composantes cartésiennes de la vitesse (u_1^1, v_1^1) au point $C^{(1)}$ se calculent facilement en utilisant l'équation, connue, de la caractéristique-limite, voir annexe 4. L'application du schéma (S) fournit les composantes cartésiennes de la vitesse en tous les autres points du maillage. Tout est maintenant connu sur la ligne $\varsigma^{(1)}$. En utilisant le même raisonnement, la connaissance du niveau $\varsigma^{(n)}$ permet le calcul de (u_j^{n+1}, v_j^{n+1}) $\forall\, j \in [1, N+1]$, N étant le nombre de bandes en η.

Nous arrêtons le processus à une distance notée ς_∞, et la résolution numérique du problème (P_T) est terminée.

La validité de notre méthode numérique pour résoudre le problème (P_T) a été confirmée par les travaux de F. GROSJEAN [19]. Il a déterminé une solution exacte pour un écoulement, à $M_\infty = 1$, d'un fluide fictif de Tomotika-

Tamada. Le profil, la distribution de pression et la forme de la caractéristique-limite qu'il obtient, sont introduits dans notre programme d'intégration du problème (P_T), programme dont la précision a été améliorée grâce à un procédé d'extrapolation à la limite qui sera décrit au paragraphe 9.1. Sur la ligne d'arrivée, ς_∞ , on compare les résultats numériques avec la solution exacte. La figure 34 donne le domaine dans lequel a été mené le calcul numérique et la figure 35, fournit son image dans le plan de l'hodographe. La comparaison sur l'axe de symétrie, entre la vitesse calculée à l'aide de la solution exacte, et la vitesse déterminée par le calcul numérique utilisant notre programme d'intégration, est montrée sur la figure 36. Les résultats sont très satisfaisants et confirment la bonne tenue de notre méthode d'intégration. Les figures 34, 35 et 36 sont extraites de [19], publication à laquelle on pourra se reporter pour plus de détails.

9.1. Obtention des résultats au 2ème ordre.

L'extrapolation à la limite est un procédé classique qui a été étudié, dès 1927, par RICHARDSON et GAUNT. Son but est d'améliorer la précision.

Soit k l'ordre de grandeur commun, moyen, des pas en η et des pas en ς . Le schéma (S) étant un schéma du 1er ordre, sur une ligne $\varsigma = \varsigma_o \leq \varsigma_\infty$ correspondant à un nombre $n = O(\frac{1}{k})$ de pas en ς déjà effectués, l'une quelconque des fonctions inconnues (u ou v), notée f, satisfait

$$\bar{\bar{f}}_\nu = f_{exacte} + Pk + O(k^2), \qquad P = cte ,$$

$\bar{\bar{f}}_\nu$ étant la valeur de f obtenue numériquement.

Recommençant l'intégration mais cette fois avec des pas moitié des précédents, nous avons

$$\bar{f}_\nu = f_{exacte} + P\frac{k}{2} + O(k^2)$$

$\bar{f}_\nu$ étant la valeur de f obtenue numériquement.

On appelle extrapolée à la limite, la quantité $\hat{f}$ définie par

$$\hat{f} = 2\,\bar{f}_{\nu-} - \bar{\bar{f}}_\nu \quad , \tag{267}$$

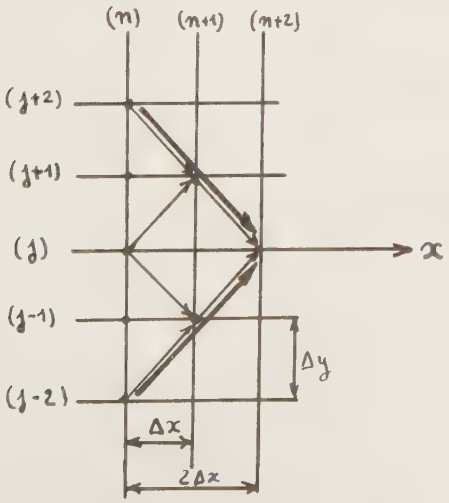
de sorte que

$$\hat{f} = f_{exacte} + O(k^2) \ .$$

En toute rigueur, ce résultat n'est vrai que pour un schéma consistant, stable et tel que les erreurs d'arrondi, qui croissent quand k décroît, soient négligeables devant les erreurs de discrétisation. Théoriquement, avec un schéma vraiment stable et une précision grande en décimales, on pourrait recommencer le procédé d'extrapolation plusieurs fois pour obtenir des résultats à $O(k^3)$... En pratique, notre schéma n'étant que pseudo-stable, le procédé d'extrapolation à la limite n'est utilisé qu'une fois en appliquant la relation (267).

Ainsi, connaissant des résultats au 1er ordre, l'extrapolation à la limite permet de les obtenir au 2ème ordre. Toutefois, ce procédé très séduisant doit être manié avec un certain nombre de précautions.

a) supposons connues les valeurs obtenues par extrapolation au niveau (n) de l'intégration. Il ne faut pas, sans discernement, se servir de ces valeurs extrapolées pour entamer les niveaux (n+1) et (n+2). Pour bien comprendre, utilisons le modèle simple de l'équation de Laplace sur lequel nous appliquons l'extrapolation à la limite. Pour passer du niveau (n) au niveau (n+1) les équations discrétisées s'écrivent sous la forme (209). Si l'on effectue ensuite le passage du niveau (n+1) au niveau (n+2)



grâce aux mêmes équations appliquées aux points ((n+1),(j+1)) et ((n+1),(j-1)), il vient finalement

$$(268)\quad \begin{cases} \bar{u}_j^{n+2} = \frac{1}{4}\,(u_{j+2}^n + 2\,u_j^n + u_{j-2}^n) + \frac{\Delta x}{2\Delta y}\,(v_{j-2}^n - v_{j+2}^n) + \\ \qquad + \frac{(\Delta x)^2}{4(\Delta y)^2}\,(-u_{j-2}^n + 2\,u_j^n - u_{j+2}^n) \\ \bar{v}_j^{n+2} = \frac{1}{4}\,(v_{j+2}^n + 2\,v_j^n + v_{j-2}^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta y}\,(u_{j-2}^n - u_{j+2}^n) + \\ \qquad + \frac{(\Delta x)^2}{4(\Delta y)^2}\,(-v_{j-2}^n + 2\,v_j^n - v_{j+2}^n) \end{cases}$$

L'application directe du schéma de Lax aux points (n,(j+2)) et (n,(j-2)), c'est-à-dire pour des pas doubles des précédents donne

$$(269)\quad \begin{cases} \bar{\bar{u}}_j^{n+2} = \frac{1}{2}\,(u_{j+2}^n + u_{j-2}^n) + \frac{\Delta x}{2\Delta y}\,(v_{j-2}^n - v_{j+2}^n) \\ \bar{\bar{v}}_j^{n+2} = \frac{1}{2}\,(v_{j+2}^n + v_{j-2}^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta y}\,(u_{j-2}^n - u_{j+2}^n) \end{cases}$$

L'extrapolation à la limite s'obtient en écrivant

$$(270)\qquad u_j^{n+2} = 2\,\bar{u}_j^{n+1} - \bar{\bar{u}}_j^{n+2}\ , \quad v_j^{n+2} = 2\,\bar{v}_j^{n+2} - \bar{\bar{v}}_j^{n+2}\ ,$$

soit

$$(271)\quad \begin{cases} u_j^{n+2} = u_j^n + \frac{\Delta x}{2\Delta y}\,(v_{j-2}^n - v_{j+2}^n) - \frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta y)^2}\,(u_{j-2}^n - 2u_j^n + u_{j+2}^n) \\ v_j^{n+2} = v_j^n - \frac{\Delta x}{2\Delta y}\,(u_{j-2}^n - u_{j+2}^n) - \frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta y)^2}\,(v_{j-2}^n - 2v_j^n + v_{j+2}^n) \end{cases}$$

Si, dans (271) on effectue le changement : $(n+2) \longrightarrow (n+1)$, $(j+2) \longrightarrow (j+1)$, $(j-2) \longrightarrow (j-1)$, $\Delta x \longrightarrow \frac{\Delta x}{2}$ et $\Delta y \longrightarrow \frac{\Delta y}{2}$, on retrouve le schéma à deux niveaux, du 2è ordre de Lax-Wendroff. Ce résultat est édifiant car le schéma de Lax-Wendroff n'introduit pas de pseudo-viscosité et par conséquent ne permet pas de résoudre un problème de Cauchy elliptique. Ceci a d'ailleurs été vérifié par F. et G. BROSSIER [4].

Conclusion.

Pour un problème de Cauchy elliptique, ou mixte, on peut appliquer tous les deux pas, le procédé d'extrapolation à la limite afin d'obtenir des résultats au second ordre mais les valeurs extrapolées ne doivent pas être réinjectées pour le calcul des deux pas suivants

b) enfin, on ne peut extrapoler à la limite que des quantités $\bar{f}$ et $\bar{\bar{f}}$ voisines, sinon les développements limités par rapport au pas moyen d'intégration, n'ont plus de sens. Or, dans l'intégration profil $\longrightarrow$ infini de notre problème transsonique, ce n'est plus le cas lorsqu'on commence à sortir de la zone "incompressible" à fort gradient de vitesse, située près du bord d'attaque. D'où l'idée de réinitialiser deux ou trois fois, entre 0 et ϱ_∞, les quantités obtenues pour les pas simples et pour les pas doubles en leur donnant, pour nouvelles valeurs, les valeurs extrapolées à la limite. En cours d'intégration, cette réinitialisation utilisant les valeurs extrapolées n'aura lieu que trois fois au maximum et n'a donc rien à voir avec la réinjection systématique tous les deux pas évoquée en a).

Les deux difficultés soulevées en a) et b) ayant obtenu une solution nous avons utilisé et incorporé dans notre programme, le processus d'extrapolation à la limite. Pour ce faire, notre programme calcule simultanément la solution dans un maillage "fin" et la solution dans un maillage "grossier".

Ces deux solutions ne se mélangent pas et sont calculées indépendamment l'une de l'autre, bien que simultanément, sur la figure (40) nous avons séparé le maillage fin (a) du maillage grossier (b), pour rendre le dessin plus clair. L'extrapolation à la limite n'est effectuée qu'à la demande, en vue d'une sortie sur imprimante, et sans interférer avec les solutions "fine" et "grossière", comme le veut a). Toutefois, pour éviter que ces deux solutions ne s'écartent trop l'une de l'autre, ce qui rendrait illusoire l'extrapolation, nous avons mis au point un procédé de réinitialisation, c'est ce que nous avons expliqué en b). Appelons $\mathcal{S}_L$ la ligne sur laquelle on réinitialise. On observe sur la figure 40.(b), qu'en les points correspondant à j pair, sur $\mathcal{S}_L$, nous ne disposons d'aucune extrapolation. Dès lors, nous interpolons à l'aide de paraboles pour trouver les valeurs des inconnues à mettre en ces points j pair. Notons que l'erreur du 3ème ordre apportée par l'interpolation parabolique, est négligeable devant celle du 2è ordre introduite par le schéma extrapolé.

Enfin, pour terminer, signalons que le procédé d'extrapolation à la limite a été testé pour l'équation de Laplace, et pour l'écoulement dans une tuyère en [4], et sur un problème hyperbolique en [19], et a donné de très bons résultats. La confirmation de la validité de l'extrapolation à la limite, pour notre problème transsonique, a été apportée par la solution exacte établie par F. GROSJEAN [19], et dont nous avons déjà parlée au début du paragraphe 9.

9.2. Cas où le profil n'est connu que par points.

Le NACA 0012 auquel nous avons appliqué notre méthode de tir, est connu analytiquement par la formule (169). Mais nous nous devions d'envisager le cas où le profil ne serait connu que par points : sous forme d'un nombre

fini de couples de coordonnées (x_i,y_i). C'est un problème de lissage. Les équations du mouvement données au paragraphe 5.3.3. font intervenir explicitement l'équation du profil ainsi que sa dérivée première. Le problème peut s'énoncer ainsi : disposant d'un ensemble de n points (x_i, y_i) espacés arbitrairement, déterminer une fonction, passant par ces n points, qui soit continue ainsi que sa dérivée première pour tout $x \in [x_1,x_n]$. Ce problème est résolu par les fonctions splines d'ordre 2 et de degré 3, dont la théorie générale est donnée en [55]. La spline d'ordre 2 et de degré 3, constituée d'un morceau de cubique dans chaque intervalle (x_{i-1},x_i), assure même la continuité de la dérivée seconde en tous les points.

Le NACA 0012 étant connu analytiquement nous avons pu comparer les résultats de l'intégration profil ⟶ infini, avec ceux obtenus en lui substituant la fonction spline d'ordre 2 et de degré 3. Les résultats obtenus sont les mêmes dans les deux cas.

Nota bene.

1) En anglais, une spline est une latte flexible de dessinateur.

2) Même pour un profil connu analytiquement, on peut avoir intérêt à calculer les fonctions $F(\sigma)$ et $F'(\sigma)$ en un nombre fini (par exemple 150) de points, et ensuite à remplacer les fonctions analytiques $F(\sigma)$ et $F'(\sigma)$ par des splines dont le calcul est beaucoup plus simple que celui des fonctions analytiques elles-mêmes (ce dernier nécessitant de coûteuses dichotomies) d'autant que le calcul de $F(\sigma)$ et de $F'(\sigma)$ est exigé en chaque point du maillage (de l'ordre de 1500 points pour un seul "aller" profil ⟶ infini). Au prix d'une perte de précision parfaitement négligeable nous avons pu ainsi réduire des 2/3 le temps de calcul moyen demandé par chaque appel de la subroutine INTEGR ! .

10. Résolution numérique du problème de tir.

La résolution numérique du problème (P_T), autrement dit l'intégration du profil vers l'infini, est maintenant assurée. Du point de vue de la programmation, cette intégration dont la procédure a été donnée au paragraphe 9, est prise en charge par une subroutine nommée INTEGR.

10.1. Position du problème.

Grosso modo, il s'agit de remettre en cause les paramètres $(\lambda_2, \lambda_3, \beta_1, \beta_2 ; P_1, P_2)$ des familles admissibles de pressions et de caractéristiques-limites, pour faire "coïncider" au mieux le champ des vitesses fourni par le développement asymptotique avec celui calculé numériquement. D'une façon plus précise, on commence par se donner un prédicteur $\pi^{(0)} = (\lambda_2, \lambda_3, \beta_1, \beta_2 ; P_1, P_2)^{(0)}$ à partir duquel INTEGR calcule, sur la ligne d'arrivée φ_∞ :

(i) les valeurs de a_1 et τ intervenant dans les développements asymptotiques du champ des vitesses et de la caractéristique-limite,

(ii) les composantes cartésiennes de la vitesse du développement asymptotique en chaque point η_j du maillage (figure 33),

(iii) la distance J entre le champ de vitesses obtenu numériquement et celui déterminé en (ii), sur la ligne $\varphi = \varphi_\infty$.

En fin de compte, INTEGR se charge de calculer la valeur $J(\pi^{(0)})$ de la fonction réelle de 6 variables réelles $J(\lambda_2, \lambda_3, \beta_1, \beta_2 ; P_1, P_2)$. Le problème consiste maintenant à minimiser J sur les 6 variables. Pour ce faire, on essaie 6 nouveaux nombres $\pi^{(1)}$, si $J(\pi^{(1)})$ est inférieur à $J(\pi^{(0)})$ on retient $\pi^{(1)}$, sinon, on le rejette et l'on cherche 6 autres valeurs.

Arrivé à ce niveau, se posent trois questions :

(a) Comment calculer a_1 et τ ?

(b) Comment définir la distance J et un critère d'arrêt ?

(c) La minimisation ne peut être faite à la main ! alors, quelle méthode de minimisation va-ton utiliser ?

Les paragraphes qui vont suivre auront pour but de répondre à ces trois questions.

10.2. Détermination des coefficients a_1 et τ.

Les coefficients a_1 et τ se calculent sur la ligne d'arrivée de sorte que ...

... (1) sur l'axe des x, la vitesse donnée par le développement asymptotique au point ($\eta = 0, \zeta = \zeta_\infty$), soit précisément la vitesse obtenue par le calcul numérique. Cette condition nous fournit une seule relation puisque, sur l'axe des $\vec{x}$, la composante cartésienne de la vitesse sur l'axe $\vec{y}$ est identiquement nulle. De la formule (120), paragraphe 4.1.1., on tire la vitesse en faisant $\bar{s} = 0$, d'après (115).(b) et (c), d'où

$$u = 1 - (\gamma+1)^{-1} \; (\bar{\zeta})^{-2/5} \tag{272}$$

et bien entendu $v = 0$ car, dans le cas symétrique, $\Lambda_{-1/5} = 0$ et $\Lambda_{-3/5} = 0$. Appelant u_ν la vitesse trouvée numériquement, on impose l'égalité

$$1 - (\gamma+1)^{-1} \; (\bar{\zeta})^{-2/5} = u_\nu \tag{273}$$

La relation entre $\bar{\zeta}$ et ζ est trouvée en appliquant (115).(a), (195) et (135).(a) sur la partie de l'axe des $\vec{x}$, située en amont du profil,

c'est-à-dire pour $\bar{\sigma} = \sigma = 0$. En utilisant (273) on déduit

$$(274) \qquad 1 - (\gamma+1)^{-1} \sqrt{\frac{a_1 (\gamma+1)^{5/3}}{2[\rho_\infty + F(0) + \tau]}} = u_\nu$$

qui représente la première équation en a_1 et τ.

··· ② la caractéristique-limite donnée par la relation (200), passe par le point ($\eta = 1$, $\rho = \rho_\infty$) dont les coordonnées cartésiennes sont notées (x_ν, y_ν). On déduit immédiatement

$$(275) \qquad x_\nu - \tau = \bar{A}\, y_\nu^{4/5} + B\, y_\nu^{2/5} + D \,, \quad D = (\bar{D})_{\Lambda_2 = -\frac{2}{5}} = 0 \,,$$

les coefficients $\bar{A}$, B et $\bar{D}$ dépendant de a_1 d'après l'annexe 1.Ⓑ.

Les deux paramètres cherchés a_1 et τ sont solution du système formé par les équations (274) et (275). La résolution de ce système conduit à une équation du type

$$(276) \quad \begin{cases} E(a_3) \equiv c_0\, a_3^5 + c_2\, a_3^3 + c_4\, a_3 + c_5 = 0 \quad (a) \,, \\ a_3 = 2^{-9/5} \cdot 3^{-3/5} \cdot 5 . a_1^{1/5} \quad (b) \,, \end{cases}$$

les coefficients c_i étant connus. On peut montrer que cette équation admet une racine positive et une seule. Des relations (276).(b) et (274) on déduit alors

$$(277) \quad \boxed{a_1 = \frac{2^9 . 3^3}{5^5}\, a_3^5 \,, (a) \qquad ; \qquad \tau = \frac{2^8 . 3^3\, a_3^5}{5^5 (\gamma+1)^{1/3} (1-u_\nu)^2} - F(0) - \rho_\infty \,, (b)}$$

qui sont déterminés d'une manière unique.

10.3. Définition d'une distance et d'un critère de sélection.

La connaissance des paramètres a_1 et τ nous permet de calculer en chaque point de $\mathcal{S}_\infty$, les composantes cartésiennes du champ asymptotique des vitesses par la relation (120) en y faisant

(i) $\underset{-\frac{2}{5}}{\Lambda} = 0$, d'après l'hypothèse du paragraphe 6.4.1.,

(ii) $\underset{-\frac{1}{5}}{\Lambda} = \underset{-\frac{3}{5}}{\Lambda} = 0$ pour un écoulement symétrique.

Le champ des vitesses, $\vec{q}_\nu^{\,\infty}$, obtenu par voie numérique sur la ligne d'arrivée, $\mathcal{S}_\infty$, devra être proche de celui, $\vec{q}_{DA}$, donné par le développement asymptotique. A cet effet, nous introduisons la distance en moyenne quadratique

$$J_1 = d_2(\vec{q}_{DA}, \vec{q}_\nu^{\,\infty})$$

La valeur de J_1 doit être la plus petite possible pour que la distribution des vitesses $\vec{q}_\nu^{\,\infty}$, présente un comportement asymptotique correct Mais encore, faudrait-il qu'il en soit de même si l'on décidait de poursuivre le calcul numérique, jusqu'à une valeur supérieure à $\mathcal{S}_\infty$. Ceci nous conduit à introduire, d'une façon naturelle, la distance entre les gradients des vitesses numérique et asymptotique, soit

$$J_2 = d(\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{q}_{DA}), \overrightarrow{\text{grad}}\, \vec{q}_\nu^{\,\infty})$$

Parmi tous les essais d'intégration du profil vers l'infini, un certain nombre peut être éliminé a priori. Ce sont ceux pour lesquels

(a) le gradient de vitesse au bord d'attaque du profil est trop faible. Alors, le nombre de Mach sur l'axe de symétrie, lorsque l'on s'éloigne du profil, croît jusqu'à une valeur maximale, puis diminue.

(b) le gradient de vitesse au bord d'attaque du profil, est trop élevé. Alors, on tend à passer la vitesse du son, sur l'axe de symétrie, à une distance finie du profil. Les pas $\Delta \varsigma$ diminuent alors, du fait des conditions automatiques de stabilité généralisée, et le calcul "piétine" sans parvenir à franchir $M = 1$ sur l'axe de symétrie.

Du point de vue de la programmation, des critères de sélection afférents à (a) et (b) sont très faciles à mettre en oeuvre. Dans les deux cas, ils arrêtent le calcul.

Ces critères de sélection étant appliqués, il peut alors arriver que, pour certaines valeurs des paramètres, le calcul s'arrête à une distance ς_I inférieure à ς_∞ fixé d'avance. Cette situation est évidemment à éviter car les domaines de calcul seraient variables donc, en particulier, la comparaison des champs des vitesses numérique et asymptotique ne se ferait plus sur la même ligne d'arrivée, d'un essai à l'autre. D'où l'idée de faire intervenir la distance

$$J_3 = d(\varsigma_\infty, \varsigma_I) \qquad , \qquad \varsigma_I \leq \varsigma_\infty$$

dans la fonction à minimiser.

Finalement, l'analyse précédente nous amène à définir la distance entre les résultats numérique et asymptotique, par une fonction linéaire de J_1, J_2, J_3 soit

$$(278) \qquad J(\lambda_2, \lambda_3, \beta_1, \beta_2 \; ; P_1, P_2) = J(J_1, J_2, J_3)$$

qui représente la fonction à minimiser.

Nota bene. Les essais numériques ont confirmé que l'introduction, avec un poids convenable, de J_3 dans J faisait amorcer très vite le calcul et qu'au bout

de quelques intégrations profil $\longrightarrow$ infini, nous obtenions toujours la distance δ_∞ fixée a priori.

10.4. La méthode de minimisation.

Parmi toutes les méthodes classiques de minimisation, laquelle choisir ? La fonction à minimiser J étant connue, non pas par son expression analytique, mais par ses valeurs prises en chaque point $\pi = (\lambda_2, \lambda_3, \beta_1, \beta_2; P_1, P_2)$, nous avons opté pour une méthode directe et plus précisément, sur les conseils du professeur J. CEA, nous avons utilisé la méthode de HOOKE et JEEVES [21].

Cette méthode possède, en effet, des qualités intéressantes :

a) elle est simple d'emploi,

b) le temps de calcul est pratiquement proportionnel au nombre de variables indépendantes. C'est là un fait remarquable car, dans les techniques de minisation classiques, les calculs augmentent proportionnellement au cube du nombre de dimensions,

c) elle permet de suivre très rapidement une arête rectiligne,

d) elle permet également de détecter et de suivre correctement une arête courbe,

e) elle convient parfaitement à la minimisation d'une somme de carrés.

Principes de la méthode de HOOKE et JEEVES.

Pour simplifier l'exposé, nous donnons la méthode de HOOKE et JEEVES dans le cas particulier, où les pas sont égaux sur chacun des axes. Ceci n'ayant rien d'essentiel quant au principe de la méthode.

En un point A de l'espace des variables indépendantes, on fait une recherche locale parallèlement aux axes, avec un pas déterminé. Si l'on trouve un point B "meilleur" (i.e. J(B) < J(A)), on tient pour probable qu'une explo-

ration analogue à partir de B, donnera les mêmes résultats. La recherche locale n'est donc pas faite en B, mais à partir d'un point C défini par

$$\overrightarrow{AC} = 2\ \overrightarrow{AB} .$$

Pour fixer les notations supposons qu'on désire minimiser la fonction $J(\vec{x})$, avec $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \ldots + x_n \vec{e}_n$, $\{\vec{e}_i\}$ étant n vecteurs unitaires orthogonaux. Au début de la minimisation, on se fixe un point de départ $\vec{x}^{(0)}$ et un pas δ . L'algorithme est le suivant : les directions déterminées par les n vecteurs $\vec{e}_i$, sont testées chacune à leur tour ; nous posons

$$\vec{x} := \vec{x}^{(i)} + \delta\ \vec{e}_i \quad , \text{ sans sommation sur i} \tag{279}$$

(le symbole : = représente l'égalité au sens de la programmation).

Au cours de la première itération (i = 1), le point $\vec{x}^{(1)}$ est identifié au point de départ $\vec{x}^{(0)}$. Si le sondage est tel que

$$J(\vec{x}) < J(\vec{x}^{(i)}) \tag{280}$$

le point $\vec{x}$ est meilleur que $\vec{x}^{(i)}$ et par conséquent il doit être conservé, on pose donc

$$\vec{x}^{(i+1)} := \vec{x} \quad , \tag{281}$$

en revanche, si (280) n'est pas satisfaite on écrit

$$\vec{x} := \vec{x}^{(i)} - \delta\ \vec{e}_i \tag{282}$$

Le test (280) appliqué pour (282) permet d'écrire

$$\vec{x}^{(i+1)} := \vec{x} , \tag{283}$$

si le test est favorable, ou

$$\vec{x}^{(i+1)} := \vec{x}^{(i)} \tag{284}$$

si le test est défavorable.

La recherche locale est terminée quand toutes les n directions ont été testées. Si le point $\vec{x}^{(n+1)}$ satisfait à

$$J(\vec{x}^{(n+1)}) < J(\vec{x}^{(0)}) \tag{285}$$

la nouvelle recherche locale doit être effectuée à partir du point

$$\vec{x}^{(1)} := \vec{x}^{(n+1)} + (\vec{x}^{(n+1)} - \vec{x}^{(0)}) \tag{286}$$

et si la condition (285) n'est pas satisfaite et si

$$\vec{x}^{(1)} \neq \vec{x}^{(0)} \tag{287}$$

alors

$$\vec{x}^{(1)} := \vec{x}^{(0)} \tag{288}$$

et l'exploration est répétée.

Cependant, si la relation (287) n'est pas satisfaite, (288) formera une boucle qui sera parcourue indéfiniment. Aussi, dans ce cas, on diminue le pas δ de moitié, soit

$$\delta := \delta/2 \ . \tag{289}$$

La recherche du minimum de J est terminée quand δ est inférieur à un seuil ε fixé d'avance.

La figure 37 donne l'organigramme de la méthode de HOOKE et JEEVES et la figure 38 illustre la recherche d'un minimum.

La méthode de HOOKE et JEEVES pourraît être appliquée, ex abrupto, à notre problème de minimisation. Cependant, le temps de calcul étant proportionnel au nombre de paramètres, d'après b), nous avons tout intérêt à diminuer celui-ci. Une technique très simple permet de le faire descendre de 6 à 4, tout en bénéficiant de la précision apportée par les 6 paramètres. La procédure est la suivante :

1) le programme de minimisation appelle la subroutine INTEGR. Celle-ci calcule les deux paramètres a_1 et τ par les formules (277) du paragraphe 10.2.

2) a_1 et τ étant fixés à ces valeurs, on adopte à l'infini, la forme de la caractéristique-limite donnée par la famille admissible à celle donnée par le développement asymptotique, et ceci fournit les nouvelles valeurs de P_1 et P_2. Les expressions analytiques de P_1 et de P_2 seront trouvées au paragraphe 6.4.1., par les formules (198).(a) et (b).

Les paramètres P_1 et P_2 sont donc calculés itérativement, et soustraits du processus de minimisation de la méthode de HOOKE et JEEVES. La méthode de minimisation que nous avons mise au point et utilisée, est la combinaison d'une méthode classique de minimisation avec une méthode itérative. La figure 39 schématise la situation.

Si dans une méthode de minimisation on ne peut pas perdre, en revanche, un processus itératif peut très bien diverger. Or, l'expérience montre que la suite $(a_1,\tau)^{(n)}$ et donc la suite $(P_1,P_2)^{(n)}$, convergent très vite. Ce résultat est très intéressant, car ainsi, bien que le calcul soit effectué dans un domaine borné, l'équation de la frontière transsonique, issue de la

famille admissible de caractéristiques-limites, est valable jusqu'à l'infini, et permet donc effectivement la résolution du problème 2 énoncé au paragraphe 3.1.

Nota Bene.

Ce processus itératif fonctionne bien, essentiellement pour les deux raisons suivantes :

i) la position précise de la frontière transsonique joue un rôle relativement secondaire, en comparaison par exemple du gradient de vitesse au bord d'attaque du profil,

ii) la frontière transsonique est pratiquement rectiligne et se trouve donc déjà presque en place, indépendamment des valeurs de P_1, P_2, dès qu'on s'est fixé, à l'aide des 4 premiers paramètres, la position de son pied et la tangente correspondante.

11. Application de la méthode de tir au profil NACA 0012.

Nous avons appliqué notre méthode de tir au profil NACA 0012, dont l'équation est fournie en (169).

a) Prédicteur choisi

• pour la famille admissible de répartition de pressions sur le profil (figure 15)

$$\lambda_2 = 0{,}8637 \ 10^{-2} \quad , \quad \lambda_3 = 0{,}2828 \quad , \quad \beta_1 = \beta_2 = 0$$

• pour la famille admissible de caractéristiques-limites

$$P_1 = 2{,}5464 \quad , \quad P_2 = 0{,}1178$$

les deux familles admissibles sont données respectivement aux paragraphes 6.3.1.. et 6.4.

b) Résultats numériques.

Tous les résultats numériques qui sont présentés ont été obtenus sur l'ordinateur CII 10070 du Centre de Calcul Universitaire de Rennes.

Pour un maillage de discrétisation correspondant à N = 20 bandes en η et 78 bandes en ζ, la résolution du problème (P_T), c'est-à-dire l'intégration numérique du profil vers l'infini, coûte 6,8 secondes ce qui représente environ 2,5 secondes sur l'Univac 1108. En partant du prédicteur a), le temps de la minimisation est de l'ordre de 7 minutes. Toutefois, il faut bien observer que si le temps de calcul afférent à la résolution du problème (P_T) peut être considéré comme intrinsèque, en revanche, celui de la minimisation dépend essentiellement

- du point de départ c'est-à-dire du prédicteur choisi,
- de l'accroissement δ à imposer sur chacun des paramètres comme le veut la méthode de HOOKE et JEEVES.

Résultat de la minimisation.

$\lambda_2 = 0{,}84207\ 10^{-2}$; $\lambda_3 = 0{,}275742$; $\beta_1 = 0{,}349066\ 10^{-1}$;

$\beta_2 = 0{,}422696\ 10^{-2}$

$P_1 = 2{,}436216$; $P_2 = 0{,}101545$; $a_1 = 0{,}467041$; $\tau = 1{,}324715$

abscisse normalisée du pied de la ligne sonique : $(xN)_S = 0{,}4878877\ 10^{-1}$

abscisse normalisée du pied de la caractéristique-limite : $(xN)_{C-L} = 0{,}163509$

La distribution de pression sur le profil et la forme de la caractéristique-limite sont maintenant parfaitement connues, et même analytiquement, en introduisant la valeur des paramètres trouvés à la fin de la minimisation, dans les familles admissibles des paragraphes 6.3.1. et 6.4.

La figure 41 fournit l'image dans le plan physique, du domaine de calcul du plan (η, ς) dans lequel nous avons mené l'intégration numérique. La figure 42 donne la distribution des nombres de Mach sur le profil, en fonction de l'abscisse comptée à partir du bord d'attaque. La figure 43 représente la même distribution des nombres de Mach sur le profil mais cette fois en fonction de l'angle polaire $\tilde{\theta}$ de la tangente à celui-ci. La figure 42 accorde une grande place à la région transsonique proprement dite, tandis que la figure 43 permet de mieux observer le voisinage du bord d'attaque.

La figure 44 représente les lignes isomach obtenues numériquement.

Bien que le domaine de calcul ne soit étendu que jusqu'à ς_∞, l'écoulement pour $\varsigma > \varsigma_\infty$ peut être décrit par le développement asymptotique (120) (voir paragraphe 4.2), dont les coefficients a_1 et τ sont maintenant connus.

Tout au long de notre travail, nous nous sommes efforcés de vérifier et de contrôler : le schéma de discrétisation, sa stabilité, sa pseudo-stabilité, l'extrapolation à la limite, pour des modèles hyperbolique, elliptique et mixte dont nous connaissions une solution exacte [3], [19]. Ces comparaisons nous ont permis d'apprécier la qualité de notre méthode d'intégration numérique.

Mais malheureusement, en ce qui concerne la méthode de tir donnant la résolution globale de notre problème transsonique, nous ne disposons d'aucune solution théorique permettant de servir de référence et de point de comparaison. Aussi, avons-nous été amenés à faire réaliser une série d'expériences en soufflerie. Ces mesures expérimentales, destinées à servir d'étalon, ont dû être, cela va sans dire, réalisées avec une grande précision. Fort heureusement nous disposons en France, à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, dirigé par G. GONTIER, d'un laboratoire dont il n'existe peut-être par d'équivalent pour ce genre d'expérimentation.

La soufflerie sonique de l'I.M.F.L. est équipée d'une veine de 200 × 40 mm^2. La maquette représentant le NACA 0012, prêtée par l'ONERA, est en laiton et possède une corde de 80 mm pour une épaisseur de 9,6 mm. Les prises de pression sont au nombre de 36, dont 12 sont disposées dans les dix premiers pourcents du profil ; le diamètre de ces orifices est 0,2 mm. La précision d'usinage du profil est de $\pm$ 0,01 mm par rapport aux cotes théoriques. Une description de la soufflerie, le réglage de la veine d'expérience et la méthode de mesures ont été donnés par A. DYMENT et P. GRYSON [9].

Grâce au contrat D.R.M.E., nous avons fait réaliser à l'I.M.F.L. une série de mesures nous fournissant en particulier

i) la distribution de pression sur le NACA 0012, figure 13 ,

ii) une visualisation d'un petit nombre de caractéristiques, par strioscopie (figure 16 - courbes ① , ② et ③) ,

iii) un champ aérodynamique autour de la maquette. Dans un premier temps, ce champ a été déterminé par des mesures de pression sur la paroi latérale de la veine d'expériences. Cependant, dans le voisinage immédiat du profil, existe une couche limite tridimensionnelle, due à l'interaction des couches limites, paroi latérale et profil, qui a nécessité des mesures complémentaires. Cette couche limite tridimensionnelle se manifeste dans certains domaines du voisinage du profil, par un glissement entre les mesures effectuées sur la paroi latérale et celle effectuées sur la maquette. Ces dernières n'étant pas sujettes à caution. Une méthode de mesures plus précise, mise au point par l'I.M.F.L. pour le cas des écoulements subsoniques élevés, a été utilisée. Cette méthode consiste à explorer le champ aérodynamique à l'aide d'une sonde statique placée au milieu de la veine d'expériences. Le glissement évoqué précédemment n'existe plus avec cette nouvelle méthode de mesures : les lignes

isomach se raccordent bien à la maquette. Cependant, il faut noter que, l'obstruction causée par la sonde statique n'a pas permis d'obtenir $M_\infty = 1$, mais $M_\infty = 0{,}96$. A titre indicatif, la figure 16 bis[1], donne pour $M_\infty = 1$, un champ d'isomachs obtenu par une méthode empirique à partir de la comparaison champ de pressions à la paroi - champs de pressions à la sonde statique, à un Mach d'approche de 0,96.

Les résultats expérimentaux i) et ii) nous ont été très précieux pour nous guider dans la construction des familles admissibles et aussi comme nous l'avons déjà dit, pour pouvoir comparer les résultats obtenus par notre méthode numérique, avec le phénomène réel. Nous voudrions, en particulier, remercier Messieurs G. GONTIER et A. DYMENT pour leur efficace et amicale collaboration.

c) Comparaison des résultats numériques et expérimentaux.

Sur la figure 43, nous constatons que l'accord entre les résultats numériques et expérimentaux sont très bons au voisinage du bord d'attaque du profil. La figure 42 montre que cet accord est toujours très bon dans la zone de faible courbure du profil. Résultats expérimentaux et résultats numériques sont si proches, compte tenu des erreurs expérimentales d'une part et numériques d'autre part, qu'il n'est pas possible de savoir lequel des deux est le meilleur.

Bien que dans les dix premiers pourcents du profil il y ait 12 prises de pression, le premier orifice, à partir du bord d'attaque, correspond à $\gamma\theta = 58°34$. De sorte que dans l'intervalle $[58°\,5,\ 90°]$ nous n'avons pas de mesures expérimentales. Notons que dans cet intervalle le diamètre des prises deviendraient de l'ordre du rayon de courbure du profil et de ce fait les mesures en ces prises, seraient fortement perturbées. Avec notre méthode numéri-

---

(1) On notera que, sur l'axe de symétrie, en amont du profil, là où les mesures expérimentales ne sont pas perturbées par cette couche-limite tridimensionnelle, la comparaison calcul-expérience est tout à fait correcte : ainsi, au point $\xi = \xi_\infty$, $n = 0$, où l'expérience indique Mach 0.834, le calcul fournit 0.814.

que, nous pouvons connaître à l'aide de la famille admissible de distribution de pression, la pression en tout point, $x \in [0, x_{CL}]$, du profil. De plus la caractéristique-limite est déterminée, et même analytiquement, alors que l'expérience en soufflerie, elle, ne permet pas de la localiser.

d) Conclusions

La méthode numérique que nous avons élaborée s'est révélée d'utilisation très souple, peu coûteuse en temps de calcul et parfaitement adaptée aux problèmes au Mach d'approche unité. En particulier, elle permet d'aborder un problème particulièrement intéressant pour les constructeurs d'avions : se donnant la distribution des vitesses, trouver le profil le plus apte à s'en approcher, dans une famille donnée. Il suffit pour cela d'inverser les points de vue, en considérant la distribution des vitesses sur le profil comme donnée, et la distribution des pentes comme cherchée dans une famille admissible. La résolution de ce problème "inverse" devrait pouvoir être menée exactement de la même manière que celle du problème direct, et nécessiter des temps de calcul tout à fait comparables. D'autre part, la méthode que nous venons de présenter a été mise au point pour un écoulement symétrique, par raison de commodité. Bien entendu elle est parfaitement applicable aux écoulements plans asymétriques.

Enfin, nous savons combien le problème de la zone locale supersonique présente de difficultés, il en est d'autant plus tentant à résoudre. Nous pouvons espérer, par l'utilisation du développement asymptotique de Finn et Gilbarg la construction de nouvelles familles admissibles et la définition d'un nouveau système de coordonnées prenant en compte le profil complet, adapter notre méthode de tir pour la résolution de ce problème capital en aérodynamique transsonique.

En conclusion, nous pouvons dire que, si les principes de notre méthode de calcul ont pu être mis au point sur le cas bien particulier de l'écoulement à $M_\infty = 1$ autour d'un profil d'aile donné, les mêmes principes pourraient être appliqués à une série de problèmes voisins dont l'intérêt pratique est certainement beaucoup plus grand. C'est pourquoi nous considérons ce travail numérique comme un début et non une fin. La longue et méthodique progression dont les principales étapes viennent d'être relatées nous a réclamé beaucoup d'efforts : il convient maintenant d'en tirer parti.

ANNEXE 1

Ⓐ • $\mathcal{P}_1(\bar{s}) = \bar{s} - 1$

• $\mathcal{P}_2(\bar{s}) = 6\gamma\left[-6(\bar{s})^2 + 10\bar{s} - 5\right] + 5\left[-6(\bar{s})^2 + 10\bar{s} + 3\right]$

• $\mathcal{P}_3(\bar{s}) = (3\bar{s}+1)^{-1}\sqrt{\bar{s}}\ \mathrm{sgn}(\bar{y})$

• $\mathcal{P}_4(\bar{s}) = 180\gamma^2\left[216(\bar{s})^5 - 432(\bar{s})^4 + 234(\bar{s})^3 + 62(\bar{s})^2 - 87\bar{s} + 24\right] +$

$+ 4\gamma\left[16632(\bar{s})^5 - 33264(\bar{s})^4 + 9405(\bar{s})^3 + 6052(\bar{s})^2 - 4830\bar{s} - 1080\right] +$

$+ 5\left[5616(\bar{s})^5 - 11232(\bar{s})^4 + 672(\bar{s})^3 + 4874(\bar{s})^2 + 1023\bar{s}\right]$

• $\mathcal{P}_5(\bar{s}) = \left\{6\gamma(3\bar{s}-4) + \left[56(\bar{s})^2 + 39\bar{s} + 4\right]\right\} \times \dfrac{1}{4(3\bar{s}+1)^3}$

• $Q_1(\bar{s}) = (3-2\bar{s})\sqrt{\bar{s}}\ \mathrm{sgn}(\bar{y})$

• $Q_2(\bar{s}) = \mathcal{P}_2(\bar{s})$

• $Q_3(\bar{s}) = (1-3\bar{s})(3\bar{s}+1)^{-1}$

• $Q_4(\bar{s}) = 180\gamma^2\left[-648(\bar{s})^6 + 1620(\bar{s})^5 - 1350(\bar{s})^4 + 165(\bar{s})^3 + 336(\bar{s})^2 - \right.$

$\left. -210\bar{s} + 28\right] + 84\gamma\left[-2376(\bar{s})^6 + 5940(\bar{s})^5 - 3645(\bar{s})^4 - 217(\bar{s})^3 + \right.$

$\left. +1257(\bar{s})^2 - 80\bar{s} - 60\right] + 5\left[-16848(\bar{s})^6 + 42120(\bar{s})^5 - 17880(\bar{s})^4 - \right.$

$\left. - 15163(\bar{s})^3 + 2898(\bar{s})^2 + 1302\bar{s}\right]$

• $Q_5(\bar{s}) = \left\{6\gamma\left[3(\bar{s})^2 + 8\bar{s} - 1\right] + \left[-70(\bar{s})^3 - 31(\bar{s})^2 + 6\bar{s} + 1\right]\right\} \times \dfrac{1}{4(3\bar{s}+1)^3}$

• $C_{-1/5} = (\gamma+1)^2\, a_1^{6/5}\, \Lambda_{-1/5}$, $C_{-2/5} = (\gamma+1)^{-2/3}\, a_1^{7/5}\, \Lambda_{-2/5}$,

• $C_{-3/5} = (\gamma+1)^{5/3}\, a_1^{8/5}\, \Lambda_{-3/5}$

Ⓑ $\bar{A} = (\gamma+1)^{1/3}\ a_2^{1/5}$

$B = \dfrac{16(54\gamma-115)}{1875}\ a_2^{3/5}$

$C = -\dfrac{1152}{625}\ a_2^2\ (\gamma+1)^{7/3}$

$\bar{D} = \dfrac{64}{390625}\ (\gamma+1)^{-1/3}\left[\dfrac{a_2}{63}\left(67716\gamma^2 - 420\gamma - 354525\right) - 27000\Lambda_{-2/5}\ a_2^{12/5}\right]$

$$\bar{E} = \frac{1536}{15625}(\gamma+1)^2 \left[-\Lambda_{-1/5}\, a_2^{12/5}\, \frac{(522\gamma+1005)}{25} + 108\, \Lambda_{-3/5}\, a_2^{14/5}\right],$$

avec $a_2 = \frac{5^5}{2^9.3^3}\, a_1$

© $\bar{\sigma}_o = \frac{2}{\sqrt{3}}\, \mathrm{sgn}(\bar{y})$

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{(54\gamma - 115)}{2.3^{7/2}.5.(\gamma+1)}\, \mathrm{sgn}(\bar{y})$$

$$\bar{\sigma}_2 = -\frac{1}{3}(\gamma+1)\, \Lambda_{-1/5}$$

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{(\mathrm{sgn}(\bar{y}))}{\sqrt{3}(\gamma+1)^2} \left[-\Lambda_{-2/5} + \frac{1}{680400}(23004\gamma^2 + 17220\gamma - 160325)\right]$$

$$\bar{\sigma}_4 = \Lambda_{-3/5} - \frac{\Lambda_{-1/5}}{2^2.3^4}(54\gamma + 139)\ .$$

ANNEXE 2

(A) La relation (132).(a) s'écrit

$$(A_2\text{-}1) \qquad \frac{\partial \varsigma}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \varsigma} - \frac{\partial \varsigma}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \varsigma} = -\frac{\partial \sigma}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \sigma}$$

soit, compte tenu de (156), (157) et après simplification par $1/(\varsigma + G(\sigma)\,F(\sigma))$

$$(A_2\text{-}2) \qquad D_2\frac{\partial u}{\partial \varsigma} + D_4\frac{\partial v}{\partial \varsigma} = -G(\sigma)\cos\sigma\frac{\partial u}{\partial \sigma} + G(\sigma)\sin\sigma\frac{\partial v}{\partial \sigma}$$

avec

$$(A_2\text{-}3) \quad \begin{cases} D_2 = \varsigma G'(\sigma)\cos\sigma + \{\varsigma\sin\sigma + \left[F(\sigma)\sin\sigma - F'(\sigma)\cos\sigma\right]G(\sigma)\}\ G(\sigma) \\ D_4 = -\varsigma G'(\sigma)\sin\sigma + \{\varsigma\cos\sigma + \left[F(\sigma)\cos\sigma + F'(\sigma)\sin\sigma\right]G(\sigma)\}\ G(\sigma) \end{cases}$$

Après simplification par $\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) - (u^2+v^2)\right]^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}$, (132).(b) s'écrit

$$(A_2\text{-}4) \quad \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)-(u^2+v^2)\right]\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{(\gamma+1)}u\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)-(u^2+v^2)\right]\frac{\partial v}{\partial y} -$$

$$- \frac{2}{(\gamma+1)}\,v\left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \quad \text{soit}$$

$$(A_2\text{-}5) \quad \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(1-u^2)-v^2\right]\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{(\gamma-1)}uv\frac{\partial v}{\partial x} + \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(1-v^2)-u^2\right]\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{(\gamma-1)}uv\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

et, en utilisant (132).(a),

$$(A_2\text{-}6) \quad \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(1-u^2) - v^2\right]\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4}{(\gamma-1)}uv\frac{\partial v}{\partial x} + \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(1-v^2)-u^2\right]\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Cette dernière équation s'exprime en variables (σ,ς) grâce à (156) et (157) :

$$(A_2\text{-}7)\quad \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(1-u^2)-v^2\right]\frac{\partial \varsigma}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \varsigma}+\left\{\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(1-v^2)-u^2\right]\frac{\partial \varsigma}{\partial y}-\frac{4}{(\gamma-1)}uv\frac{\partial \varsigma}{\partial x}\right\}\frac{\partial v}{\partial \varsigma}+$$

$$+\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(1-u^2)-v^2\right]\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \sigma}+\left\{\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(1-v^2)-u^2\right]\frac{\partial \sigma}{\partial y}-\frac{4}{(\gamma-1)}uv\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right\}\frac{\partial v}{\partial \sigma}=0$$

Après simplification par $1/(\varsigma + G(\sigma)\,F(\sigma))$, la relation $(A_2\text{-}7)$ s'écrit :

$$(A_2\text{-}8)\quad \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(u^2-1)+v^2\right]D_4\frac{\partial u}{\partial \varsigma}+\left\{\frac{4}{(\gamma-1)}uv\,D_4-\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(v^2-1)+u^2\right]D_2\right\}\frac{\partial v}{\partial \varsigma}=$$

$$=\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(u^2-1)+v^2\right]\sin\sigma\,G(\sigma)\frac{\partial u}{\partial \sigma}+\left\{\frac{4}{(\gamma-1)}uv\sin\sigma\,G(\sigma)+\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(v^2-1)+u^2\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\cos\sigma\,G(\sigma)\right\}\frac{\partial v}{\partial \sigma}$$

$$(A_2\text{-}9)\qquad \mathbb{A}=\begin{pmatrix} D_2 & , & D_4 \\ \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(u^2-1)+v^2\right]D_4 & , & \frac{4}{(\gamma-1)}u\,v\,D_4-\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(v^2-1)+u^2\right]D_2 \end{pmatrix}$$

$$(A_2\text{-}10)\qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix} -\cos\sigma\,G(\sigma) & , & \sin\sigma\,G(\sigma) \\ \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(u^2-1)+v^2\right]\sin\sigma\,G(\sigma) & , & \frac{4}{(\gamma-1)}uv\sin\sigma\,G(\sigma)+\\ & & +\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)(v^2-1)+u^2\right]\cos\sigma\,G(\sigma) \end{pmatrix}$$

(B)

$$(A_2\text{-}11)\qquad \mathbb{D}=\begin{pmatrix} \frac{\sigma'_{CL}(\varsigma)}{\sigma_{CL}(\varsigma)}\eta+\frac{C_{11}}{\sigma_{CL}(\varsigma)} & , & \frac{C_{12}}{\sigma_{CL}(\varsigma)} \\ \frac{C_{21}}{\sigma_{CL}(\varsigma)} & , & \frac{\sigma'_{CL}(\varsigma)}{\sigma_{CL}(\varsigma)}\eta+\frac{C_{22}}{\sigma_{CL}(\varsigma)} \end{pmatrix}$$

les C_{ij} étant les éléments de la matrice $\mathbb{C}=\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$

ANNEXE 3

Le système (241) s'écrit :

$$(A_3\text{-}1)\begin{cases} L_1 \equiv \dfrac{\partial u}{\partial \xi} - D_{11}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} - D_{12}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \\ L_2 \equiv \dfrac{\partial v}{\partial \xi} - D_{21}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} - D_{22}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

Effectuons la combinaison linéaire $L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$

$$L \equiv \underbrace{\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} - (\lambda_1 D_{11} + \lambda_2 D_{21})\frac{\partial u}{\partial \eta}}_{\text{= dérivée de u dans une direction}} + \underbrace{\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial \xi} - (\lambda_1 D_{12} + \lambda_2 D_{22})\frac{\partial v}{\partial \eta}}_{\text{= dérivée de v dans une autre direction}} = 0$$

pour que ce soit une dérivée dans la même direction $(d\xi, d\eta)$, on doit réaliser

$$A_3\text{-}2 : \quad \frac{\lambda_1}{-(\lambda_1 D_{11} + \lambda_2 D_{21})} = \frac{\lambda_2}{-(\lambda_1 D_{12} + \lambda_2 D_{22})} = \frac{d\xi}{d\eta}$$

Le système linéaire en λ_1 et λ_2 , défini par A_3-2, admet une solution non banale si et seulement si son déterminant est nul. D'où l'équation des directions caractéristiques : $\zeta = \dfrac{d\eta}{d\xi}$;

$$A_3\text{-}3 \qquad \zeta^2 + (D_{11} + D_{22})\,\zeta + D_{11} D_{22} - D_{12} D_{21} = 0$$

La condition d'ellipticité se traduit par

$$A_3\text{-}4 \qquad \delta' = \frac{(D_{11} - D_{22})^2}{4} + D_{12} D_{21} < 0,$$

et celle d'hyperbolicité par

A_3-5 $$\delta' = \frac{(D_{11}-D_{22})^2}{4} + D_{12}\, D_{21} > 0$$

Le long d'une caractéristique C^+ ou C^- , on a

A_3-6 $$\zeta_\pm = \left(\frac{dn}{d\xi}\right)_{C^\pm} = \frac{-(D_{11}+D_{22})}{2} \pm \sqrt{\frac{(D_{11}-D_{22})^2}{4} + D_{12}\, D_{21}}$$

ANNEXE 4

Pour les notations, on se reportera à la figure 33.

L'équation de la caractéristique-limite est connue, $\sigma = \sigma_{CL}(\varsigma)$. L'abscisse du point $C^{(n)}$ dans le plan physique s'écrit

$$A_4\text{-}1 \qquad x_{C^{(n)}} = -\left[\frac{\varsigma^{(1)}}{G(\sigma_{C^{(n)}})} + F(\sigma_{C^{(n)}})\right] \cos(\sigma_{C^{(n)}}) \text{ avec } \sigma_{C^{(n)}} = \sigma_{CL}(\varsigma^{(n)})$$

Si nous appelons $\tilde{\theta}$ l'angle polaire de la vitesse avec l'axe Ox et A l'angle de Mach, sur la caractéristique-limite nous avons

$$A_4\text{-}2 \qquad \left(\frac{dy_{CL}}{dx}\right)_{x=x_{C^{(n)}}} = tg(\tilde{\theta} + A),$$

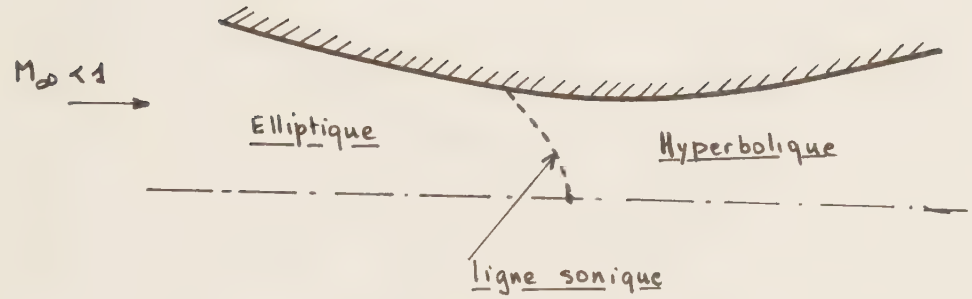
avec

$$A_4\text{-}3 \qquad \tilde{\theta} + A = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\mu} \text{Arctg}\,(\mu\sqrt{M^2-1}) - 2\,\text{Arctg}(\sqrt{M^2-1}) \quad , \quad \mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

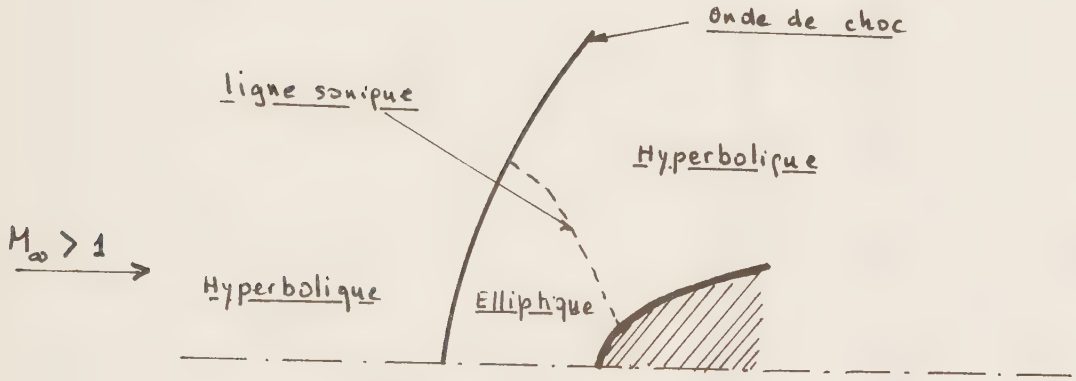
La pente $\frac{dy_{CL}}{dx}$ de la frontière transsonique est connue à partir de la relation (194). De sorte que A_4-2 et A_4-3 déterminent le nombre de Mach $M_{C^{(n)}}$ au point $C^{(n)}$. Et de là les composantes cartésiennes de la vitesse au point $C^{(n)}$ par les relations

$$A_4\text{-}4 \quad \begin{cases} u_1^n = U\cos(\tilde{\theta}) \quad , \quad v_1^n = U\sin(\tilde{\theta}), \\ \text{avec} \quad U = M_{C^{(n)}}\sqrt{\dfrac{(\gamma+1)}{2+(\gamma-1)M^2_{C^{(n)}}}} \quad \text{et} \\ \tilde{\theta} = \dfrac{1}{\mu}\,\text{Arctg}\,(\mu\sqrt{M^2_{C^{(n)}} - 1}) - \text{Arctg}\,(\sqrt{M^2_{C^{(n)}} - 1}) \end{cases}$$

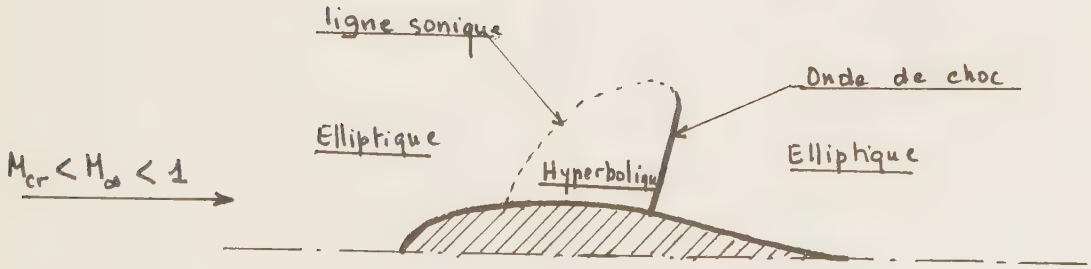
Figure 7



Exemple a



Exemple b



Exemple c

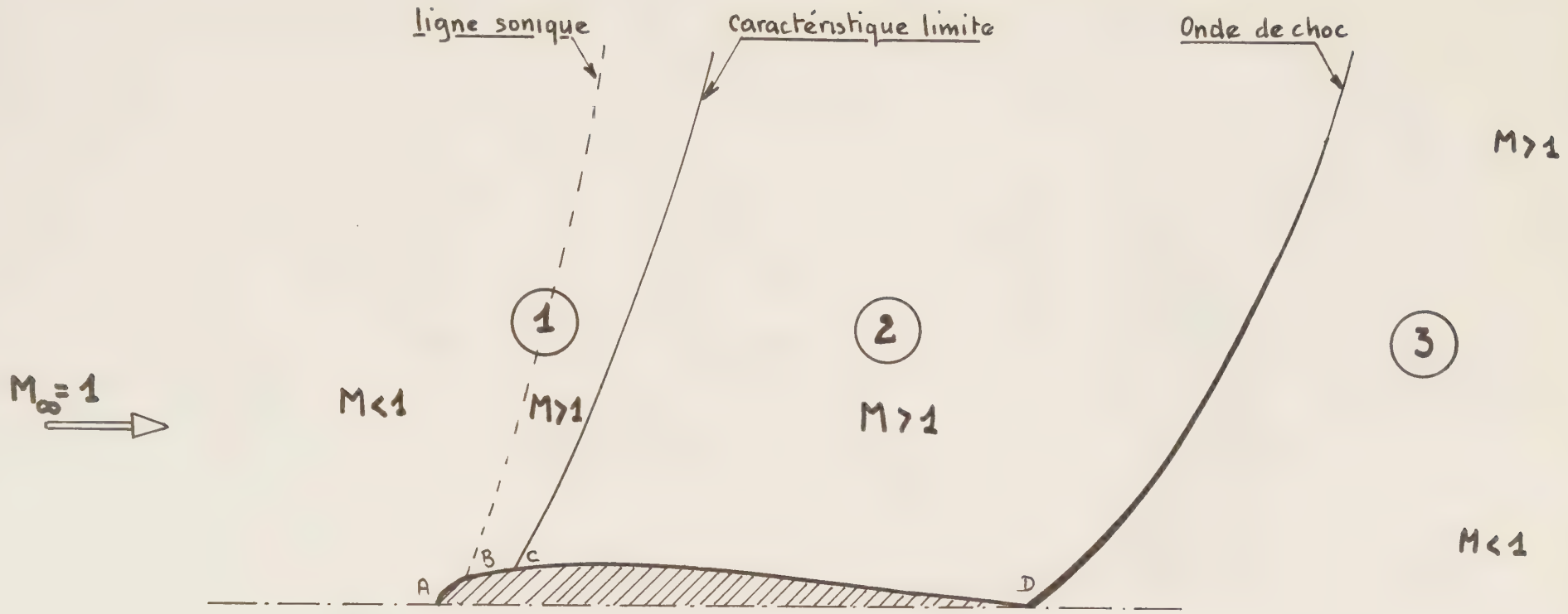


Schéma physique de l'écoulement.

Figure 8

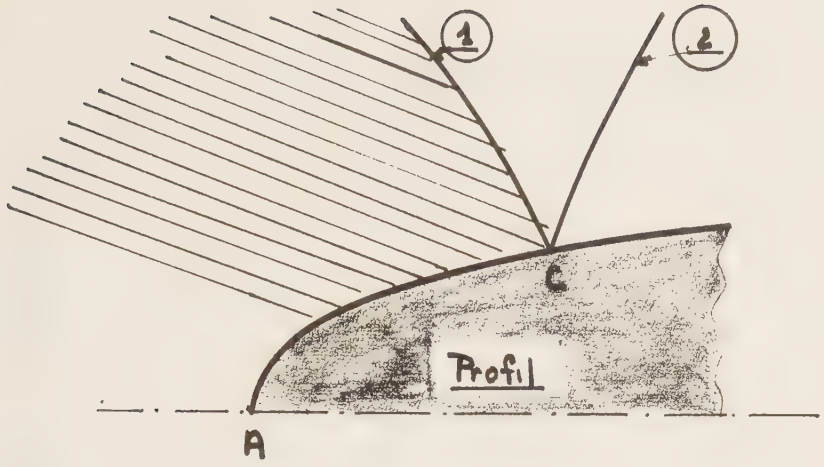


Figure 9

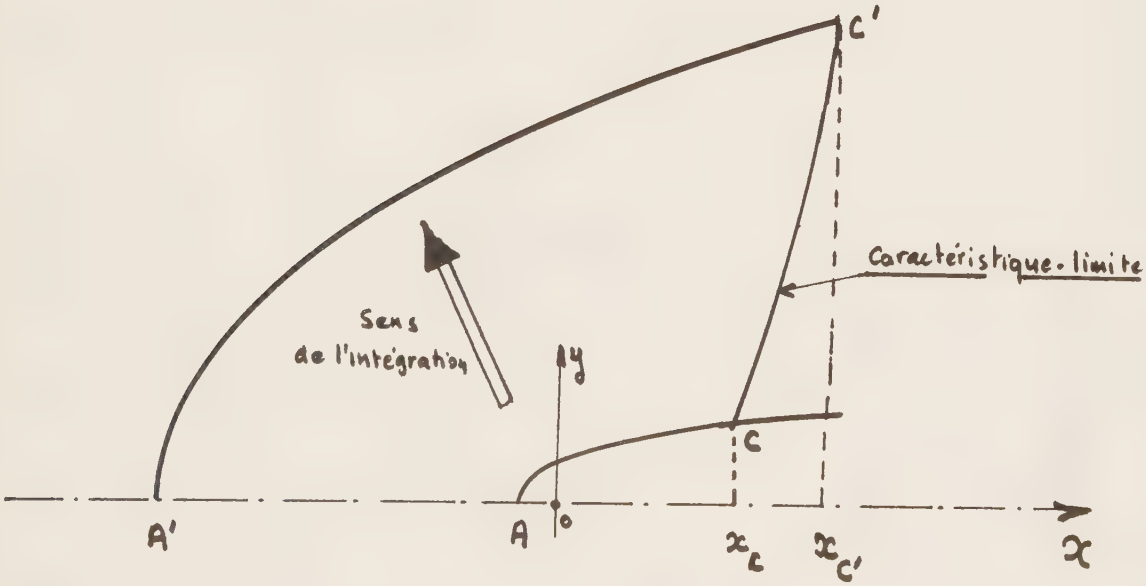


Figure 10

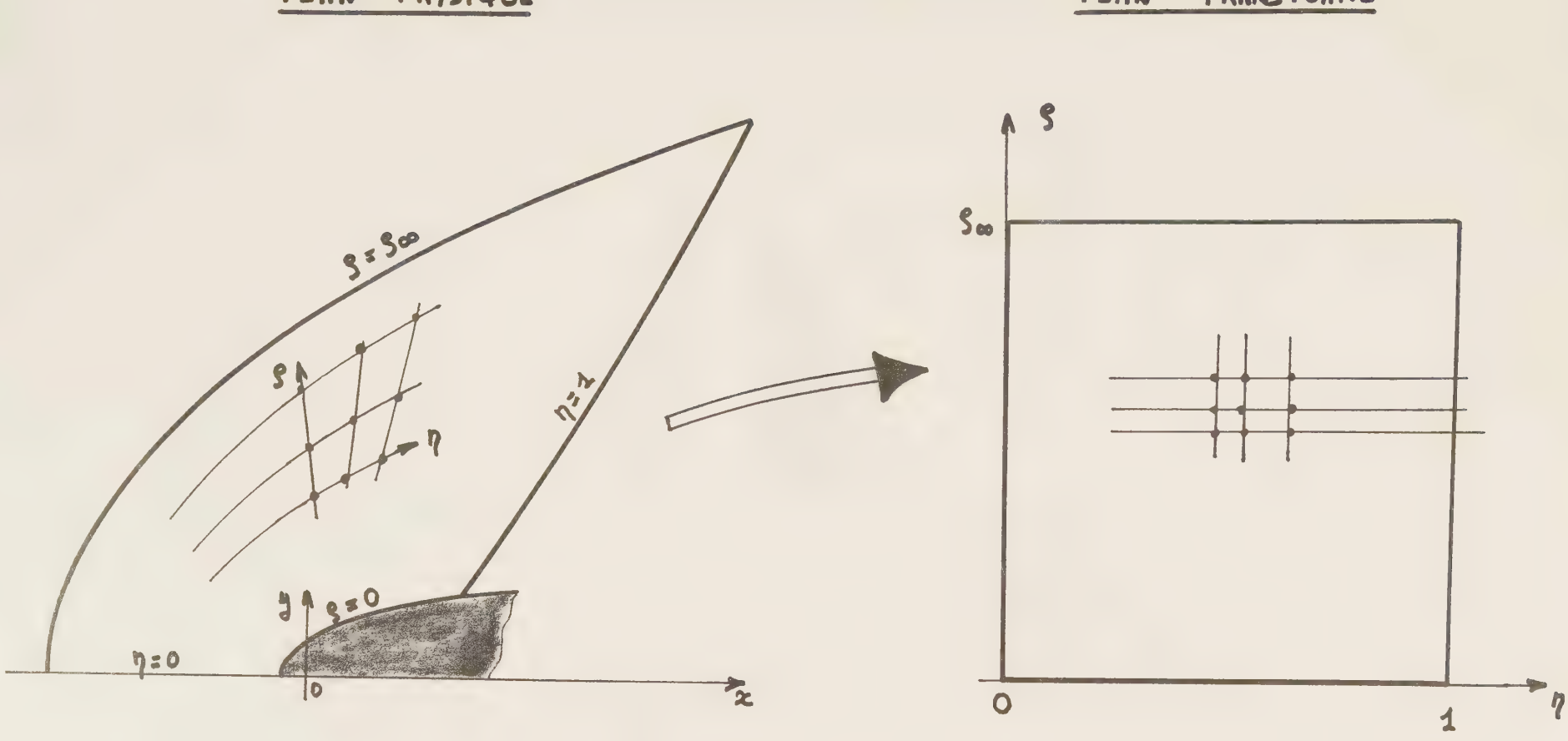


Figure 11

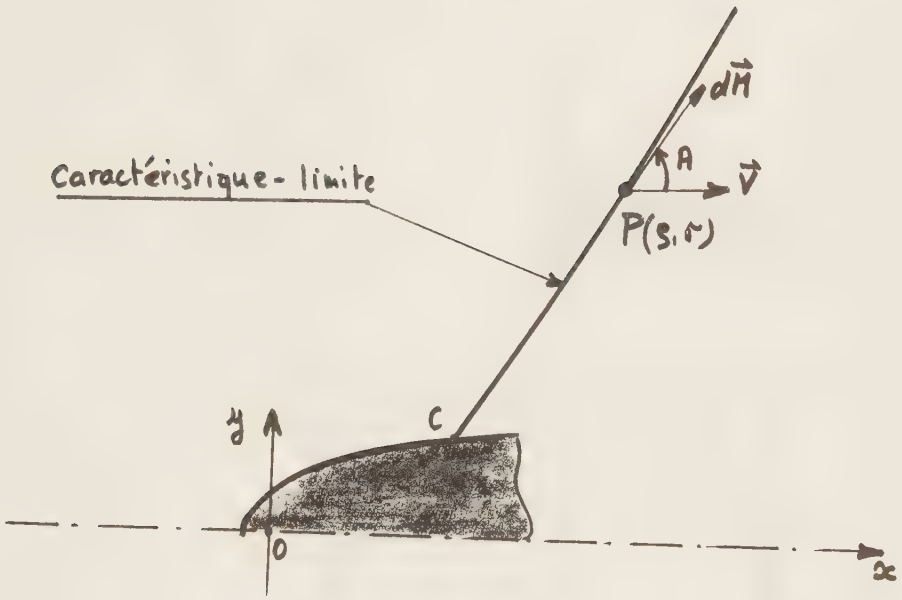


Figure 12

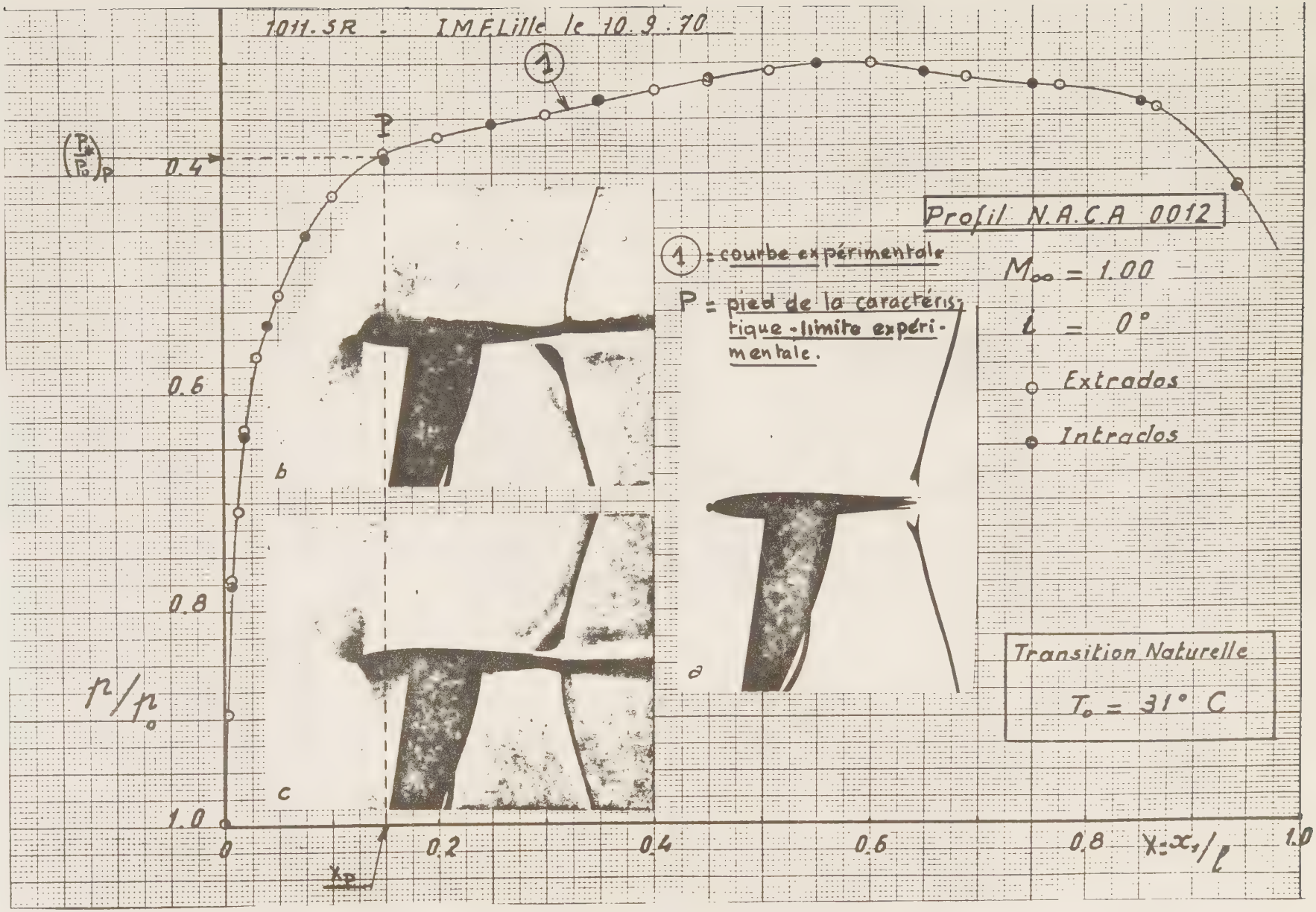
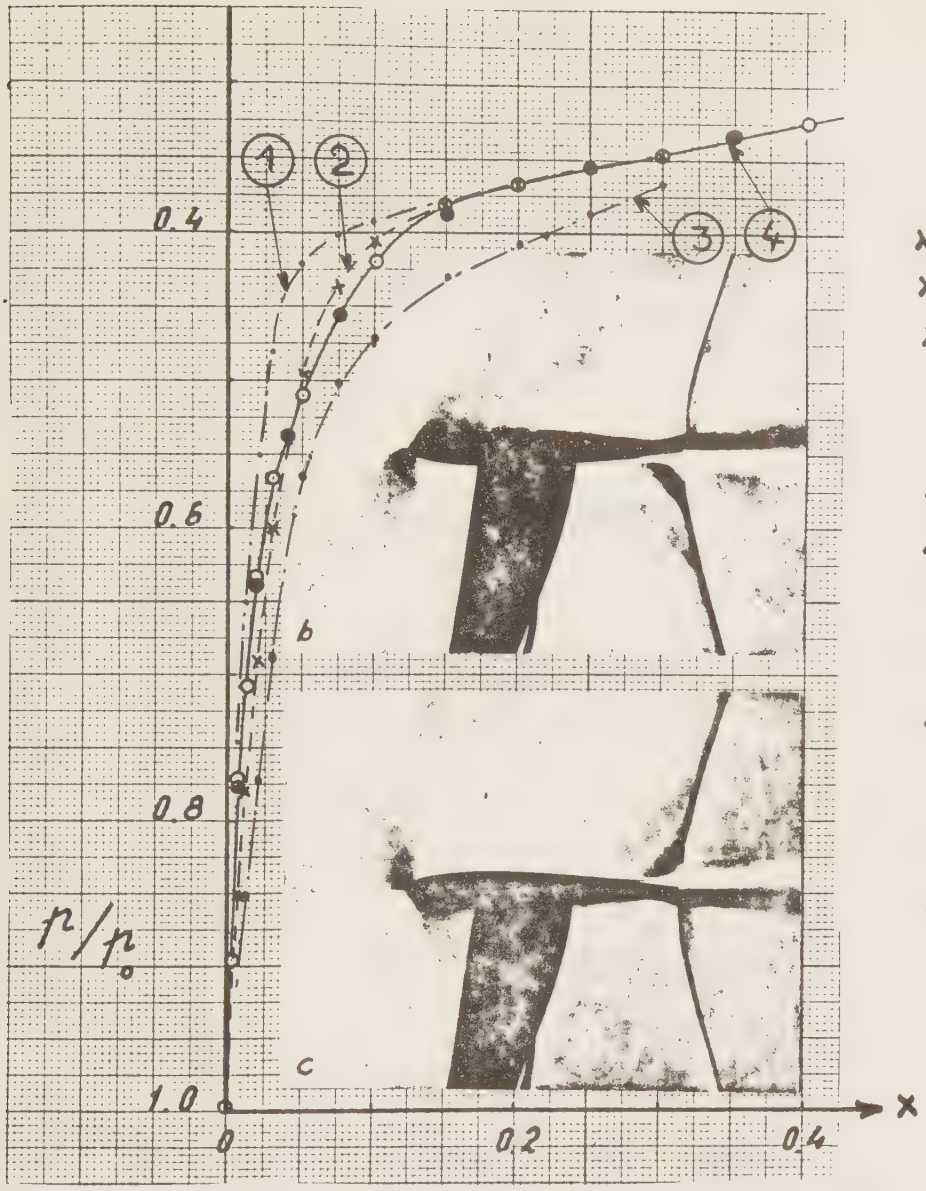

1011.3R - IMFLille le 10.9.70
1
P
$\left(\frac{p_*}{p_0}\right)_P$
0.4
0.6
0.8
1.0
p/p_0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
$X = x_1/l$
1.0
X_P
Profil N.A.C.A 0012
1 = courbe expérimentale
P = pied de la caractéristique-limite expérimentale.
$M_\infty = 1.00$
$i = 0°$
Extrados
Intrados
Transition Naturelle
$T_0 = 31° C$
a
b
c

Figure 13



courbe 1

$\lambda_1 = 0,3460$; $\lambda_4 = 0,3009$

$\lambda_2 = 0,0141$; $\lambda_5 = -0,10097$

$\lambda_3 = 0,0727$

Courbe 2

$\lambda_1 = 0,3460$; $\lambda_4 = 0,3009$

$\lambda_2 = 0,0274$; $\lambda_5 = 0,1138$

$\lambda_3 = 0,0727$

courbe 3

$\lambda_1 = 0,3450$; $\lambda_4 = 0,3560$

$\lambda_2 = 0,0347$; $\lambda_5 = +0,1326$

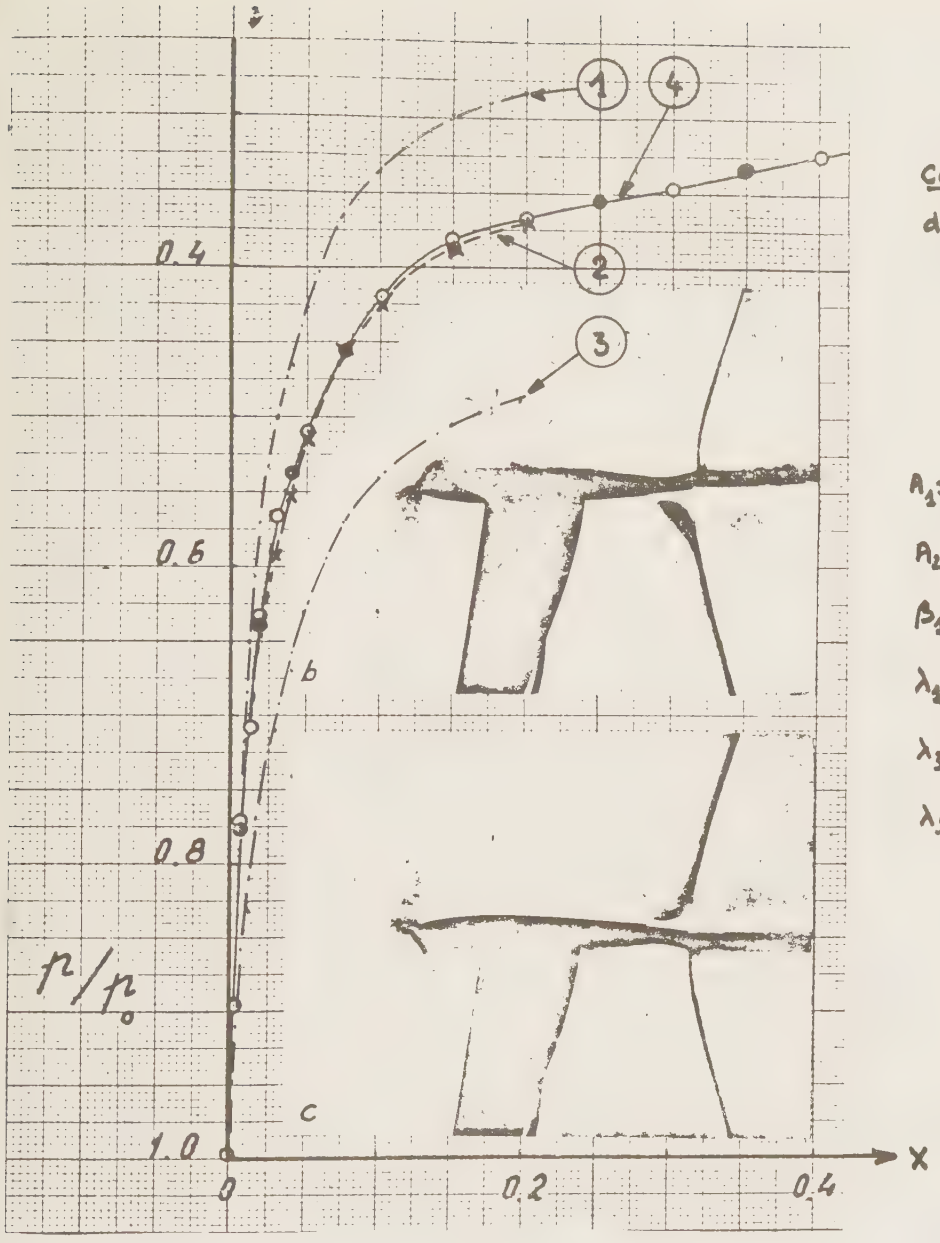
$\lambda_3 = 0,1221$

courbe 4 = courbe expérimentale.

Courbe 2

X	$\frac{f}{f_0}$ famille admissible	$\frac{f}{f_0}$ expérimental	Erreur absolue	Erreur relative %
•27500000E-02	•94387700E 00	•89696000E 00	•46916995E-01	•52306675E 01
•80000000E-02	•85096143E 00	•77147000E 00	•79491432E-01	•10303892E 02
•12750000E-01	•78070050E 00	•70806000E 00	•72640500E-01	•10259088E 02
•20370000E-01	•69014211E 00	•63408000E 00	•56062114E-01	•88414891E 01
•30360000E-01	•60292428E 00	•56671000E 00	•36214285E-01	•63902674E 01
•38630000E-01	•49720178E 00	•51057000E 00	-•13316217E-01	-•26084997E 01
•75500000E-01	•43584020E 00	•45575000E 00	-•19909799E-01	-•43665791E 01
•1[illegible] 00	•[illegible] 00	•42008000E 00	-•13094146E-01	-•31170601E 01
•1[illegible] 00	•38150722E 00	•38243000E 00	-•92278255E-03	-•24139453E 00
•20047000E 00	•36722099E 00	•36724000E 00	-•10011098E-04	-•27260362E-02
•25000000E 00	•35593627E 00	•35535000E 00	•58526903E-03	•16470227E 00
•30088000E 00	•34610000E 00	•34610000E 00	•33266727E-16	•24058575E-13

Figure 14



Courbes 1 et 3 = encadrement de la coube 4 expérimentale

Courbe 2

$A_1 = 28,293$ $B_1 = -4,9378$

$A_2 = 4,4977$ $B_2 = -0,9779$

$\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$

$\lambda_1 = 0,3461$ $\lambda_2 = 0,8637\ 10^{-2}$

$\lambda_3 = 0,2828$ $\lambda_4 = 0,2445$

$\lambda_5 = -0,1476$

Courbe 2

X	$\frac{P}{P_0}$ famille admissible	Erreur absolue	Erreur relative %
.27500000E-02	.89560693E+00	.10890700E-02	.12145364E-02
.80000000E-02	.76651940E+00	.49506000E-02	.64170998E-02
.12750000E-01	.69875506E+00	.93049400E-02	.13141456E-01
.20370000E-01	.64004530E+00	-.59653000E-02	-.94078345E-02
.30380000E-01	.59345310E+00	Pour cette abscisse le point présente un léger défaut, la mesure de pression ne peut être prise en compte.	
.50630000E-01	.51653530E+00	-.59653000E-02	-.11683608E-01
.75500000E-01	.45381710E+00	.19329000E-02	.42411409E-02
.10050000E+00	.42604530E+00	-.59653000E-02	-.14200390E-01
.15050000E+00	.38839531E+00	-.59653100E-02	-.15598436E-01
.20037000E+00	.37320531E+00	-.59653100E-02	-.16243628E-01

Figure 15

F L	Problème	Dessiné par :	Vérifié par :	Date :	Fig : 1
	1011 - SR	P. Gryson		10. 9. 70	

— — — caractéristiques tracées à partir de la strioscopie b

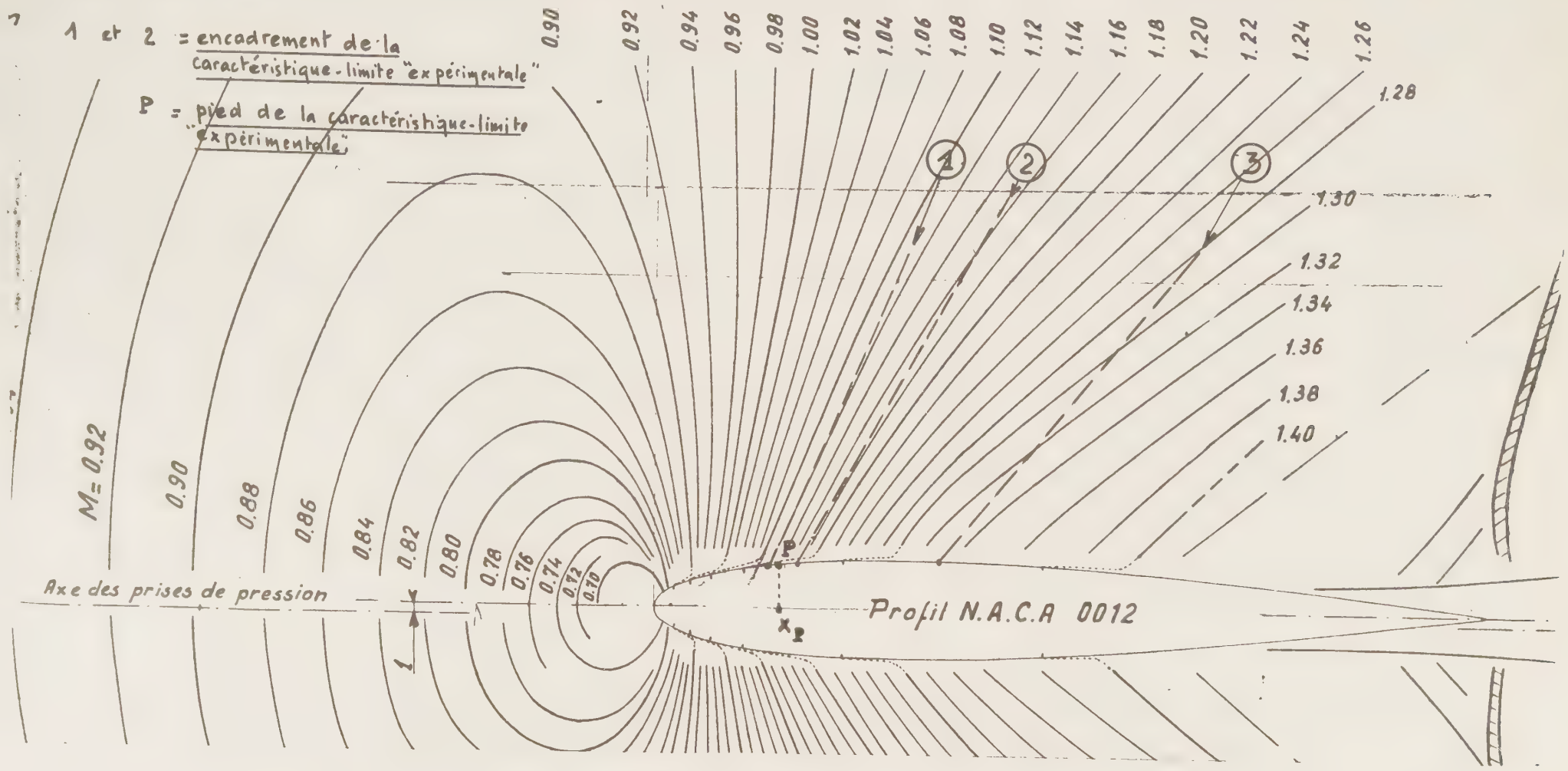
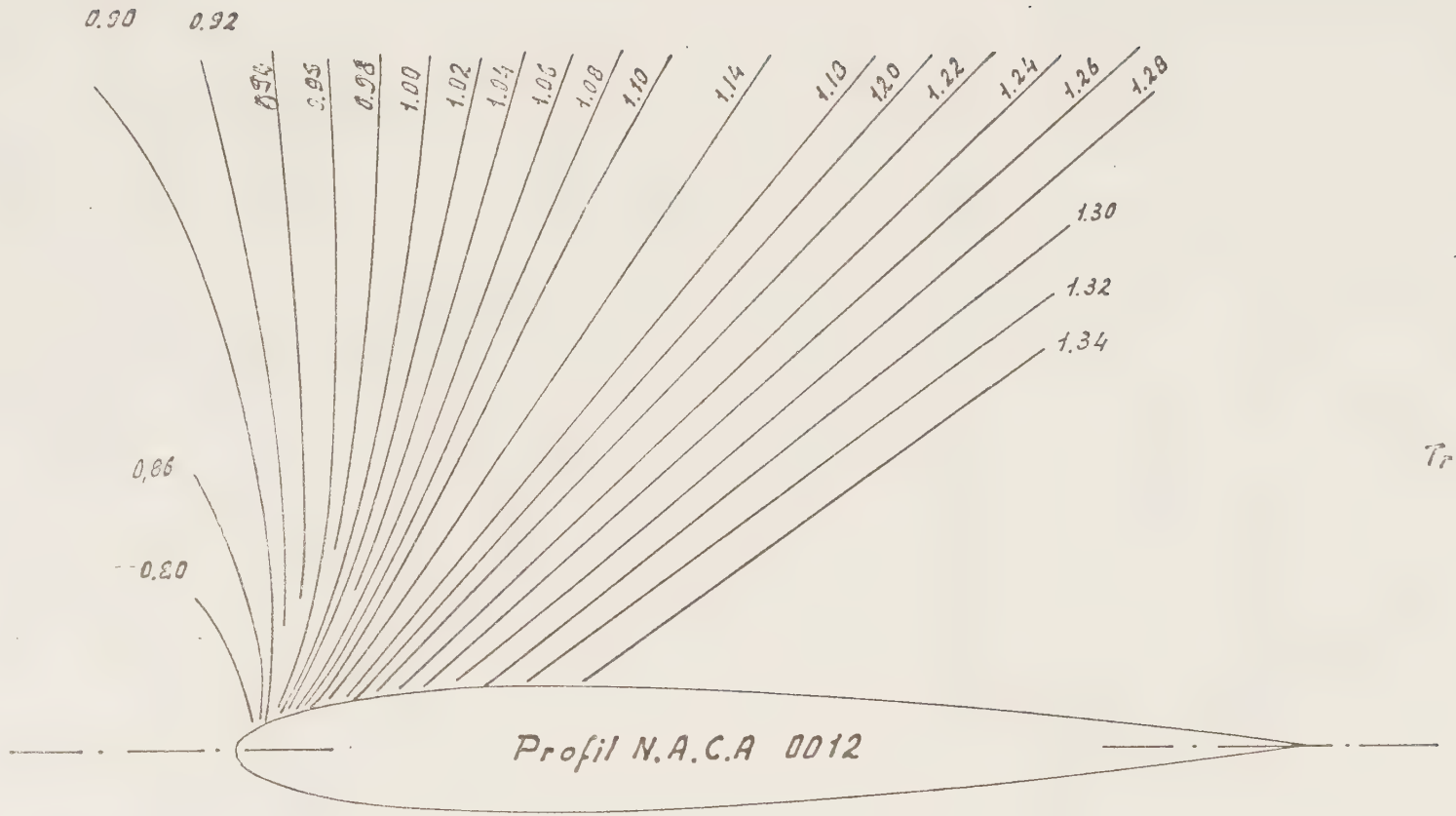


Figure 16

Champ d'isomachs rectifié.



$M_\infty = 1.00$

$i = 0°$

Transition libre

Ce champ d'isomachs est donné à titre indicatif, pour $M_\infty = 1$. Il est obtenu par une méthode empirique à partir de la comparaison champ de pressions à la paroi - champ de pressions à la sonde statique, à $M_\infty = 0.96$.

Figure 16 bis

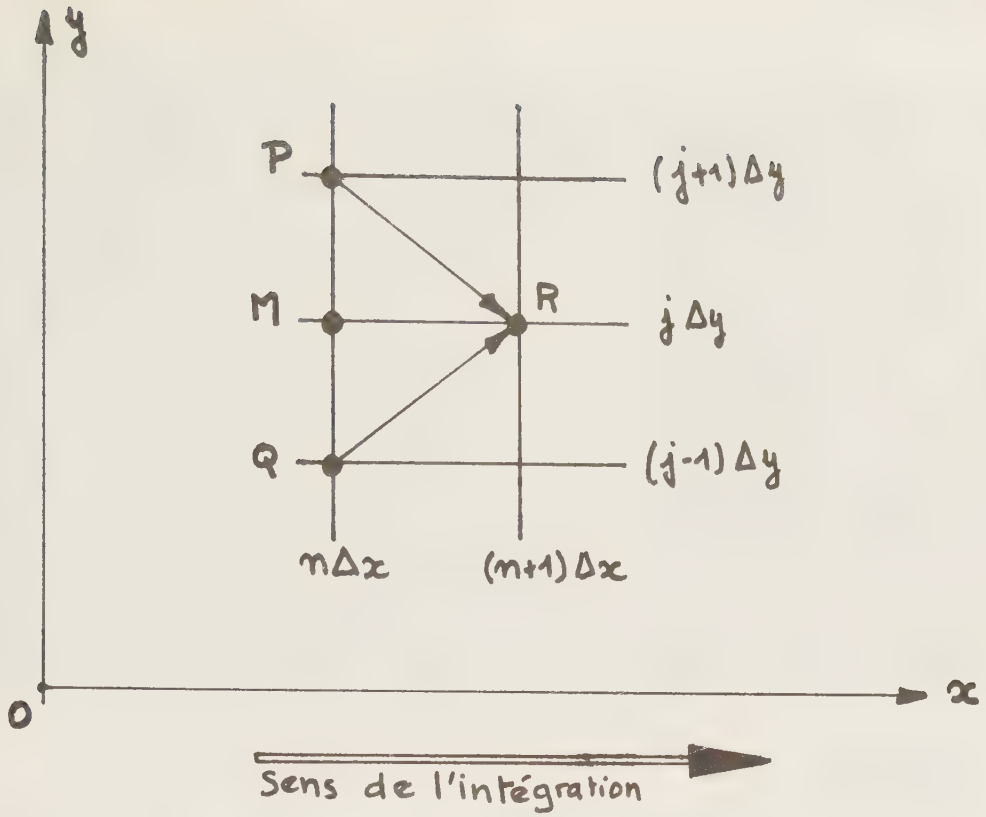


Figure 17

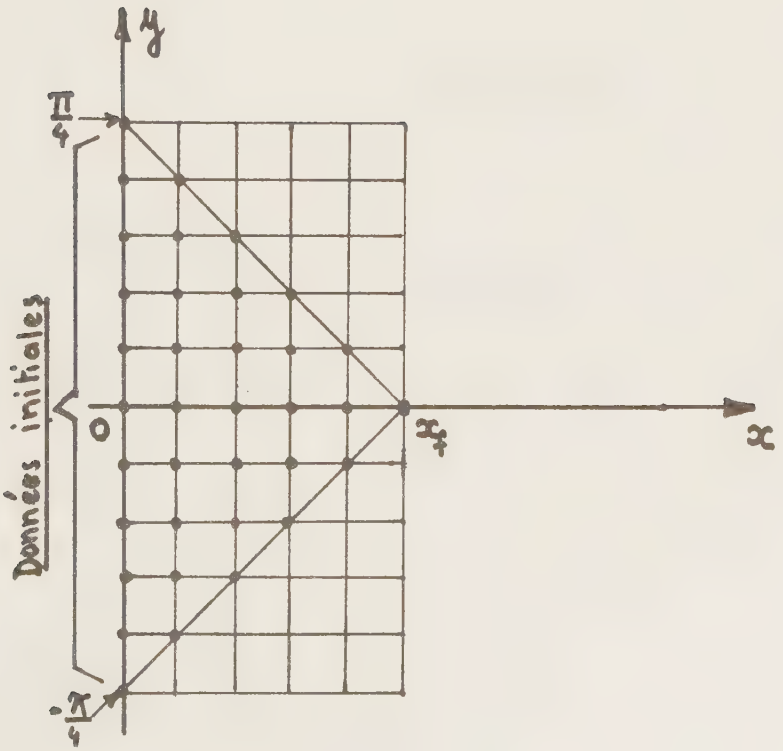


Figure 18

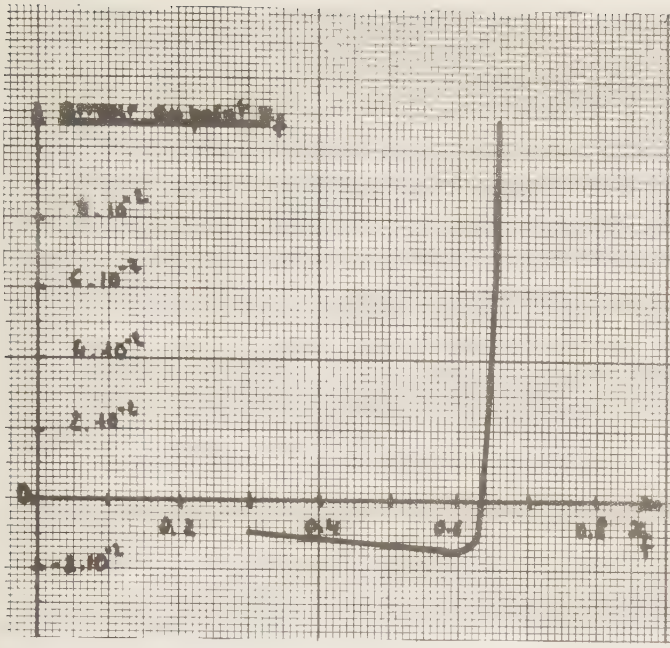


Figure 19

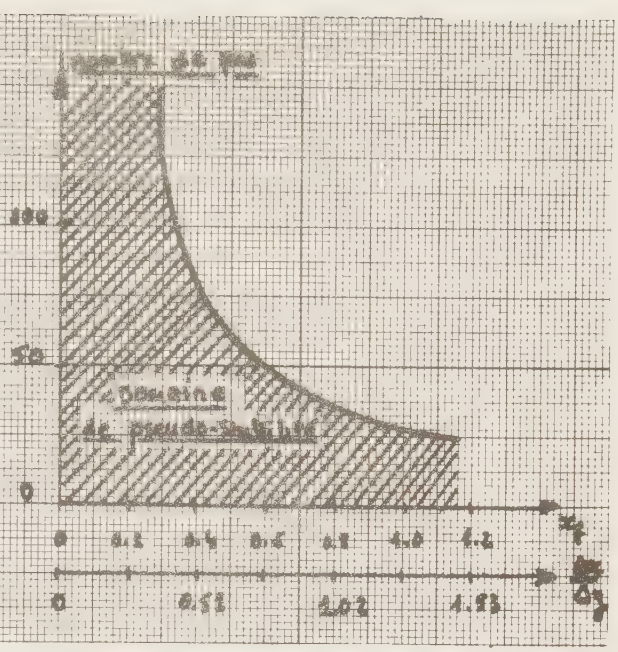


Figure 20

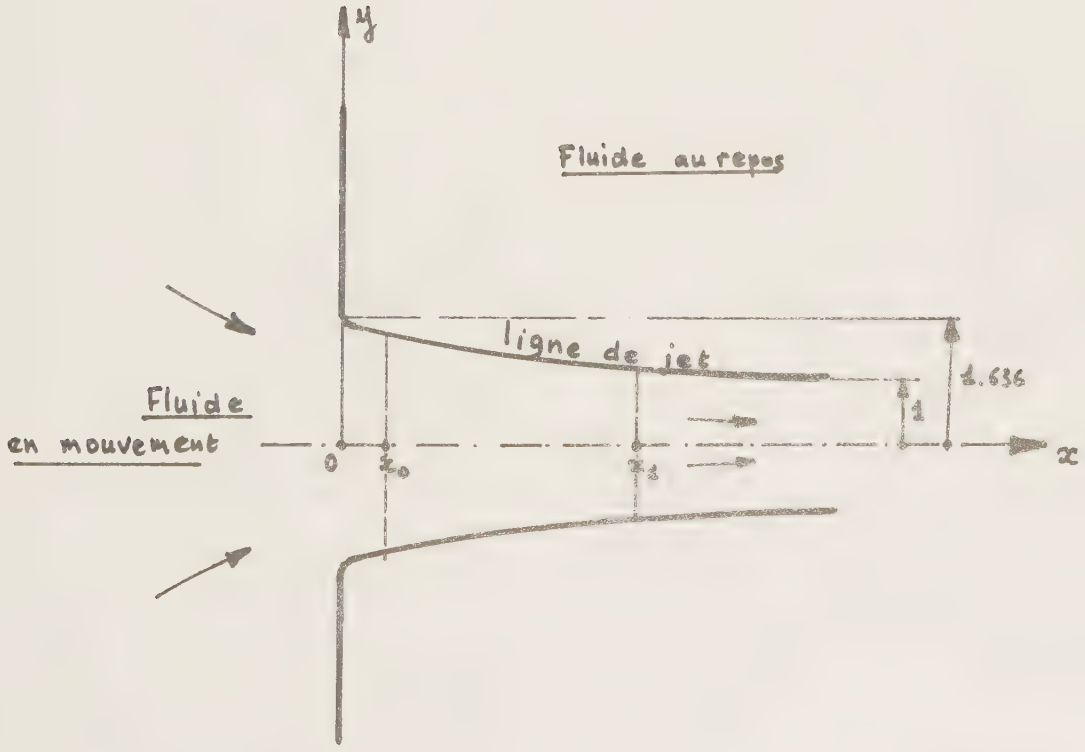


Figure 21

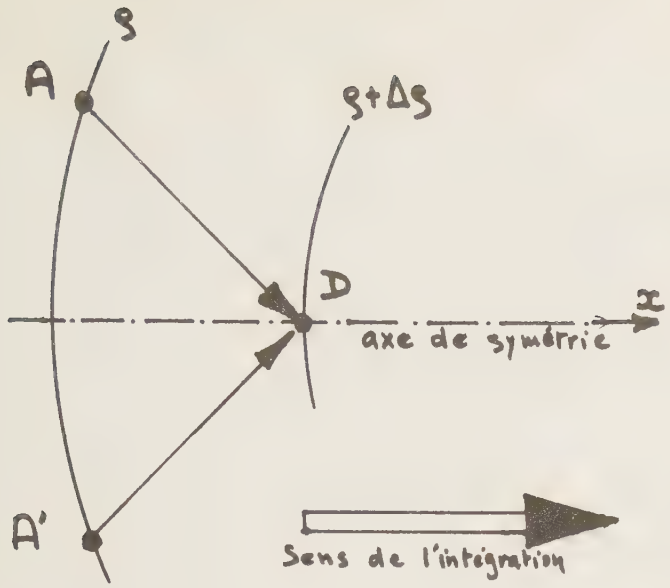


Figure 22

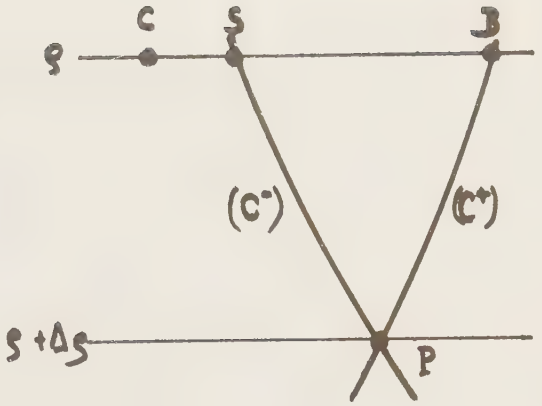


Figure 23

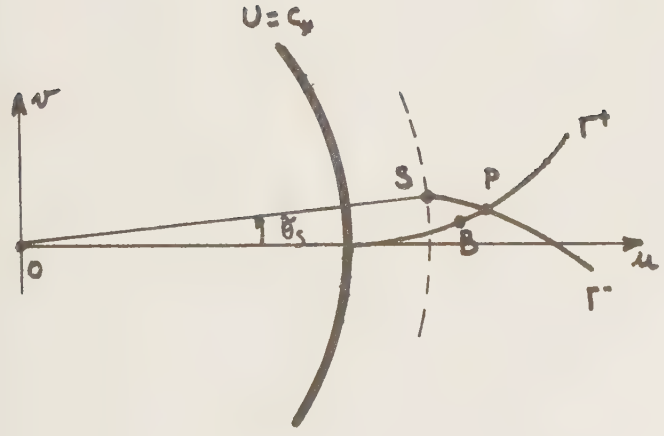


Figure 24

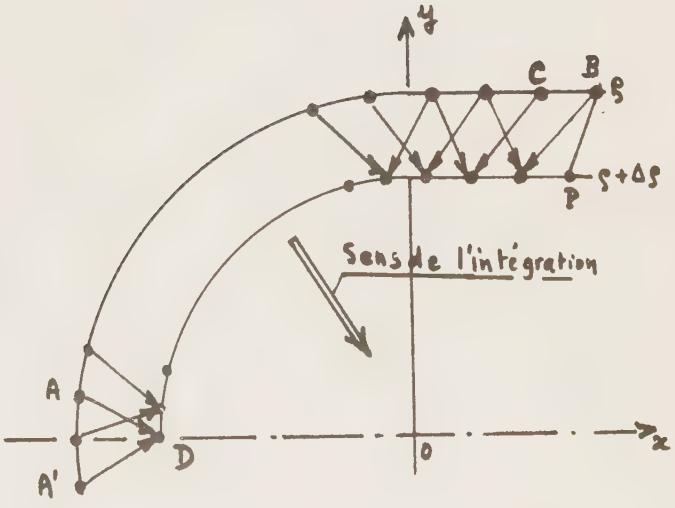


Figure 25

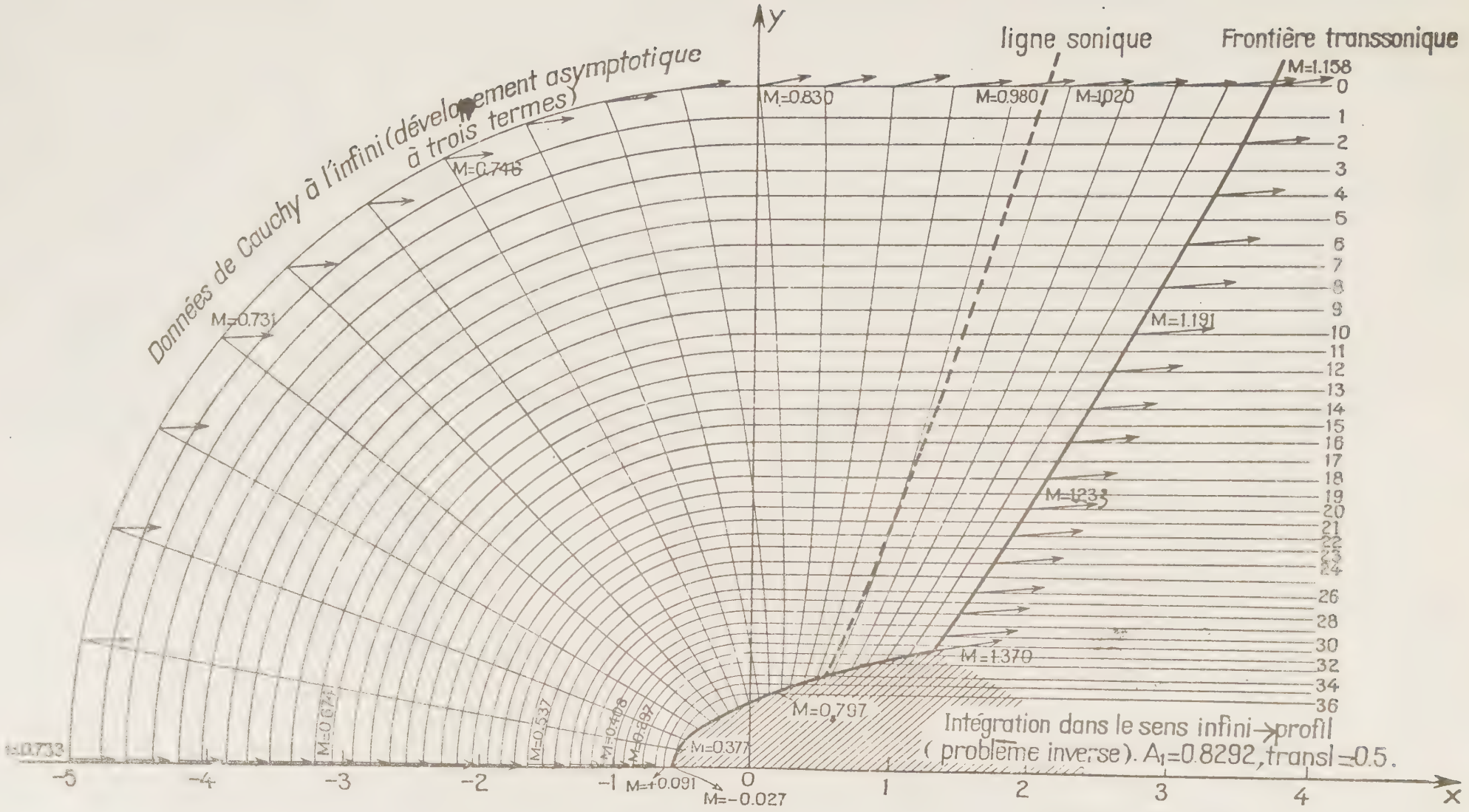

Données de Cauchy à l'infini (développement asymptotique à trois termes)
ligne sonique
Frontière transsonique
y
x
M=0.733
M=0.731
M=0.746
M=0.830
M=0.980
M=1.020
M=1.158
M=1.191
M=1.233
M=1.370
M=0.797
M=0.377
M=+0.091
M=−0.027
M=0.537
M=0.478
M=0.492
Intégration dans le sens infini→profil
(problème inverse). A1=0.8292, transl=0.5.

Figure 26

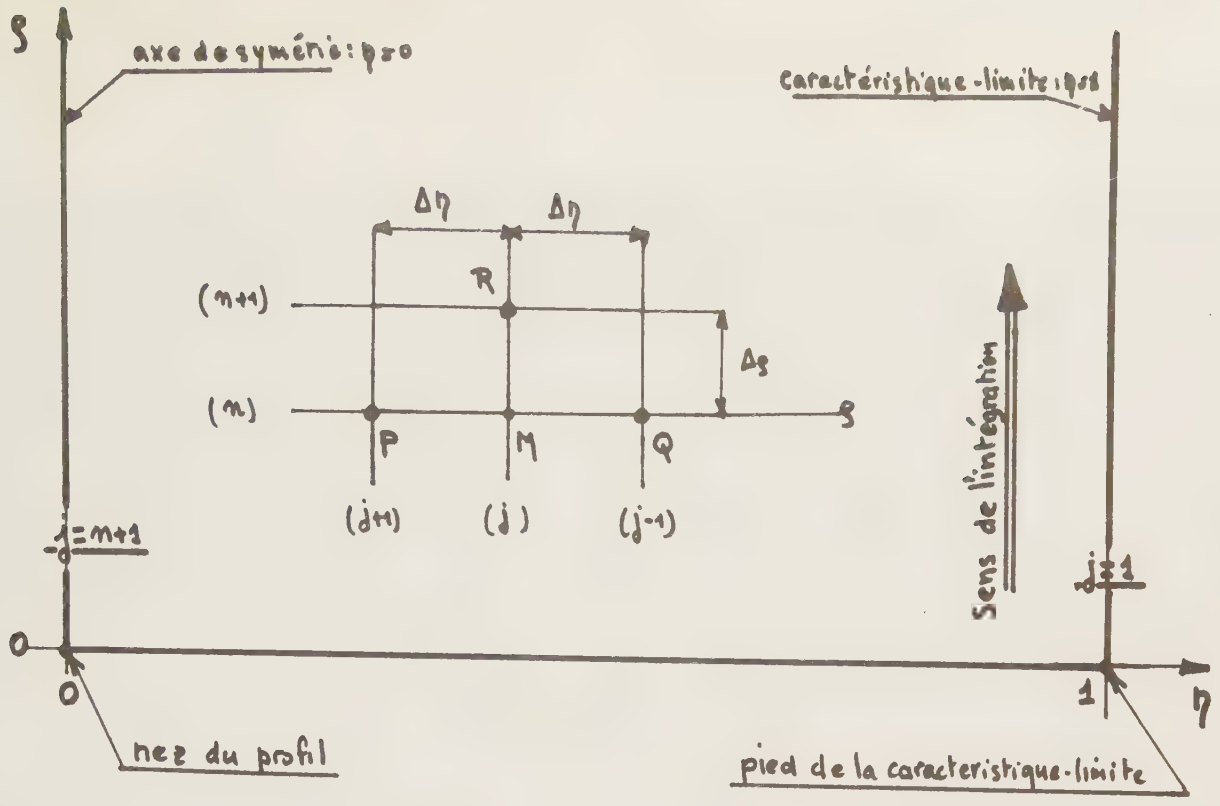


Figure 27

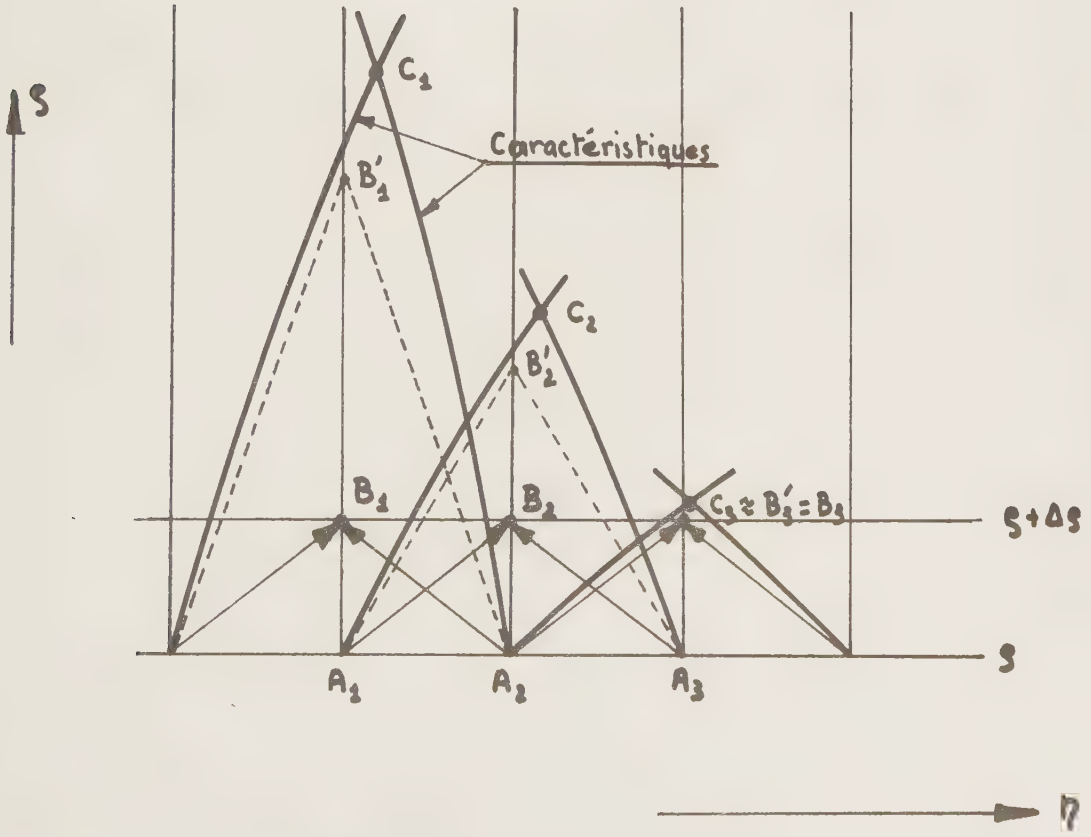


Figure 28

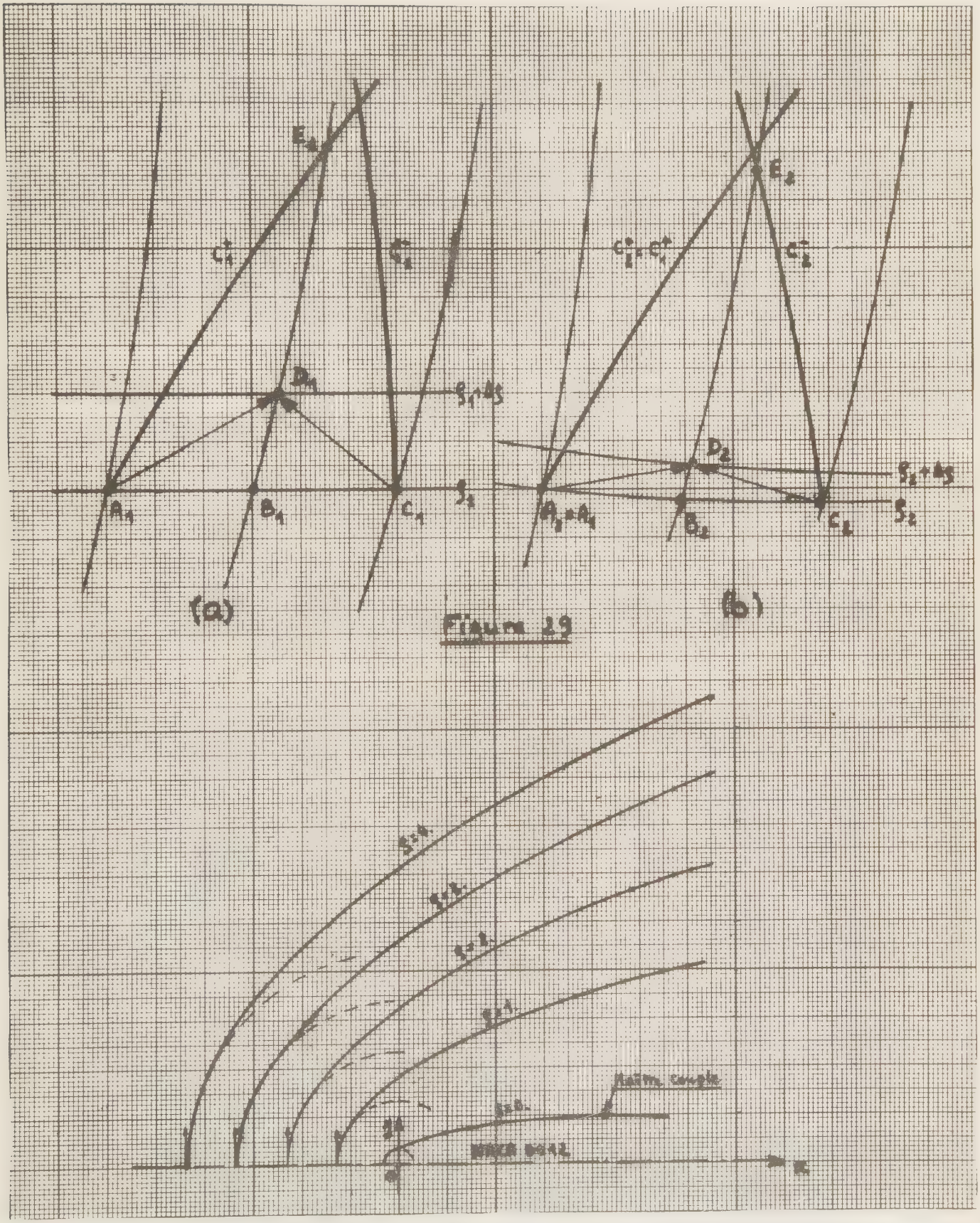


Figure 29

Figure 30

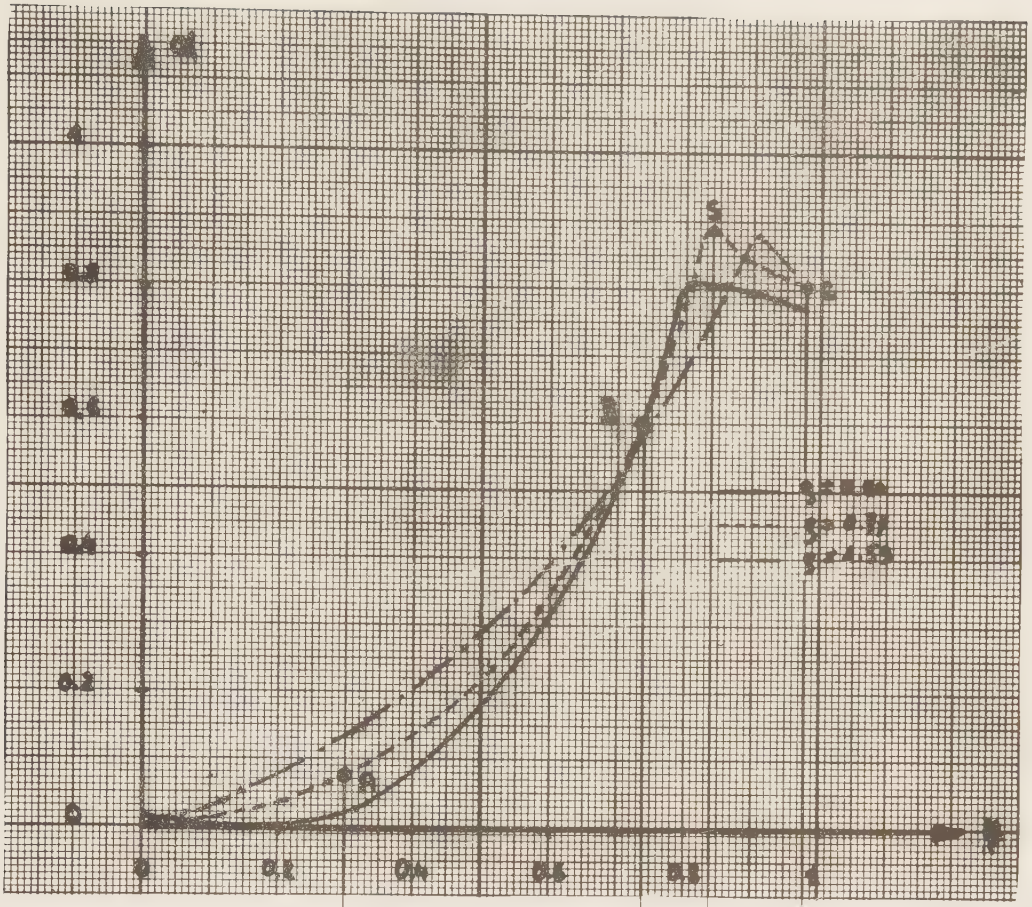


Figure 31

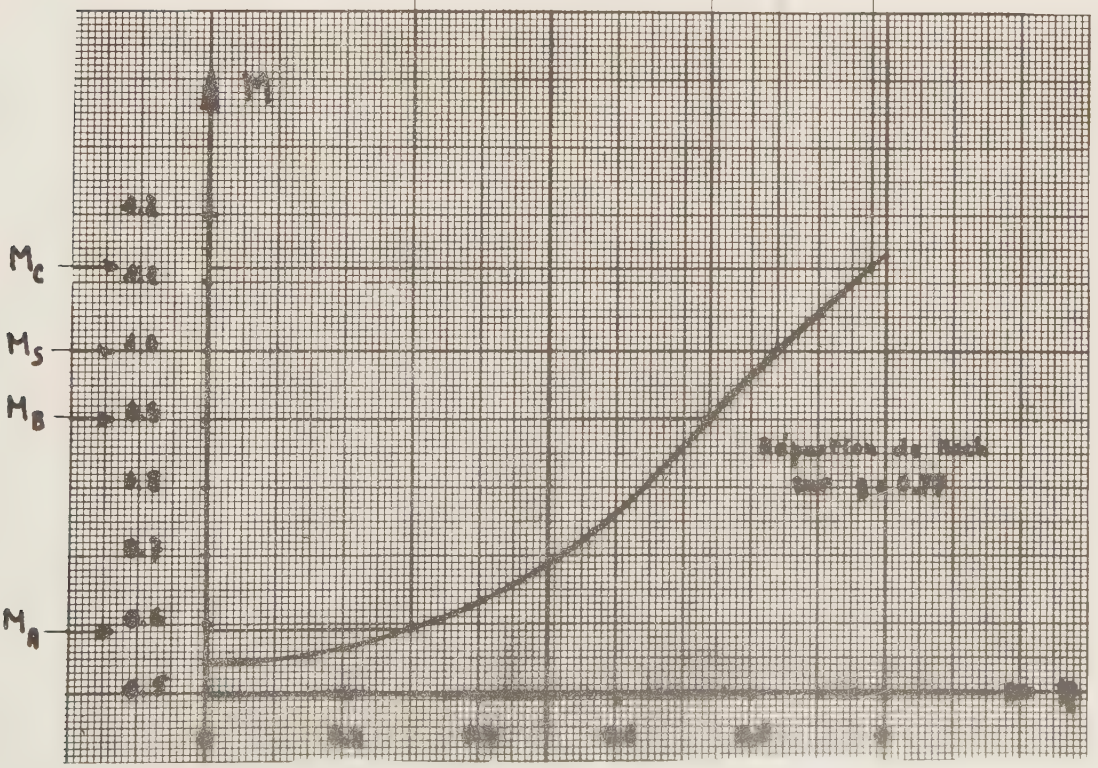


Figure 32

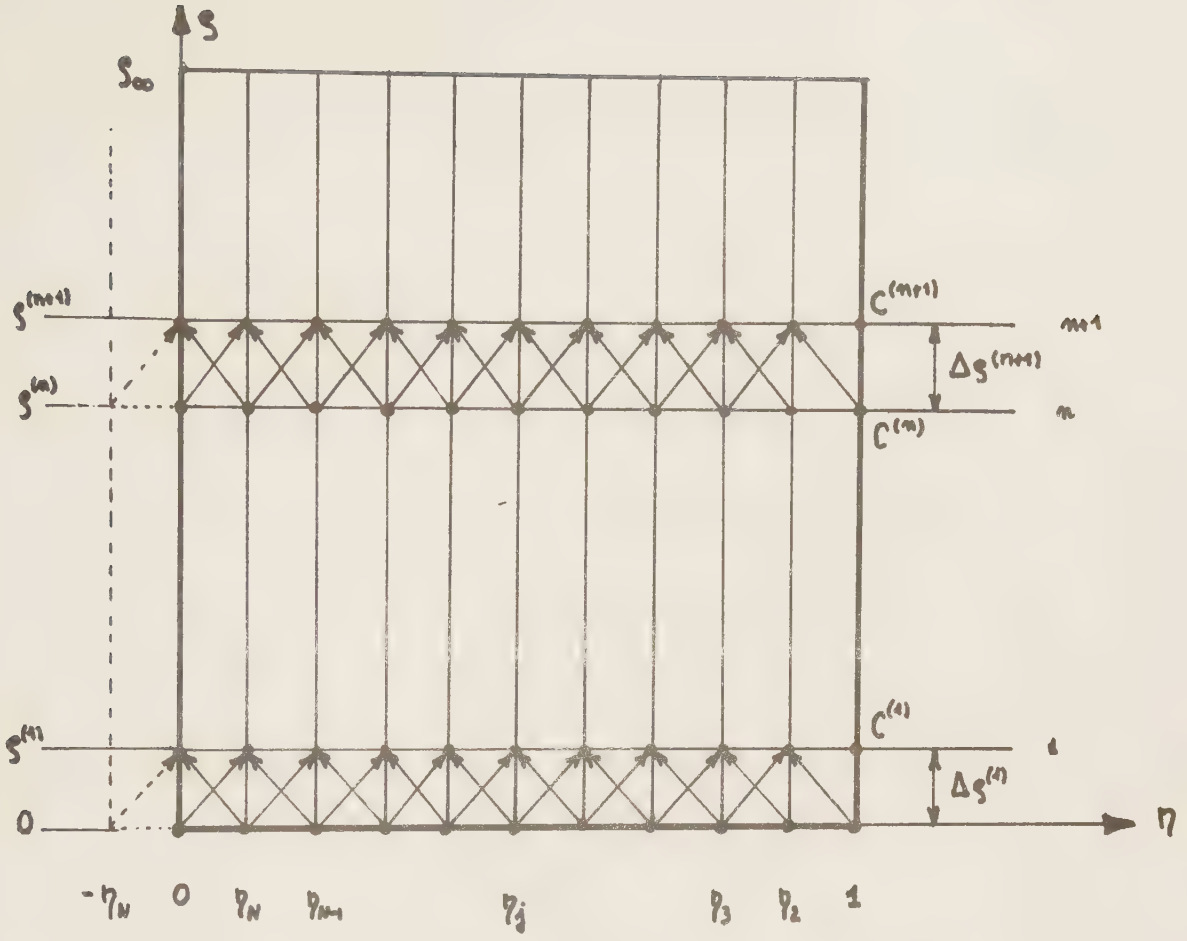


Figure 33

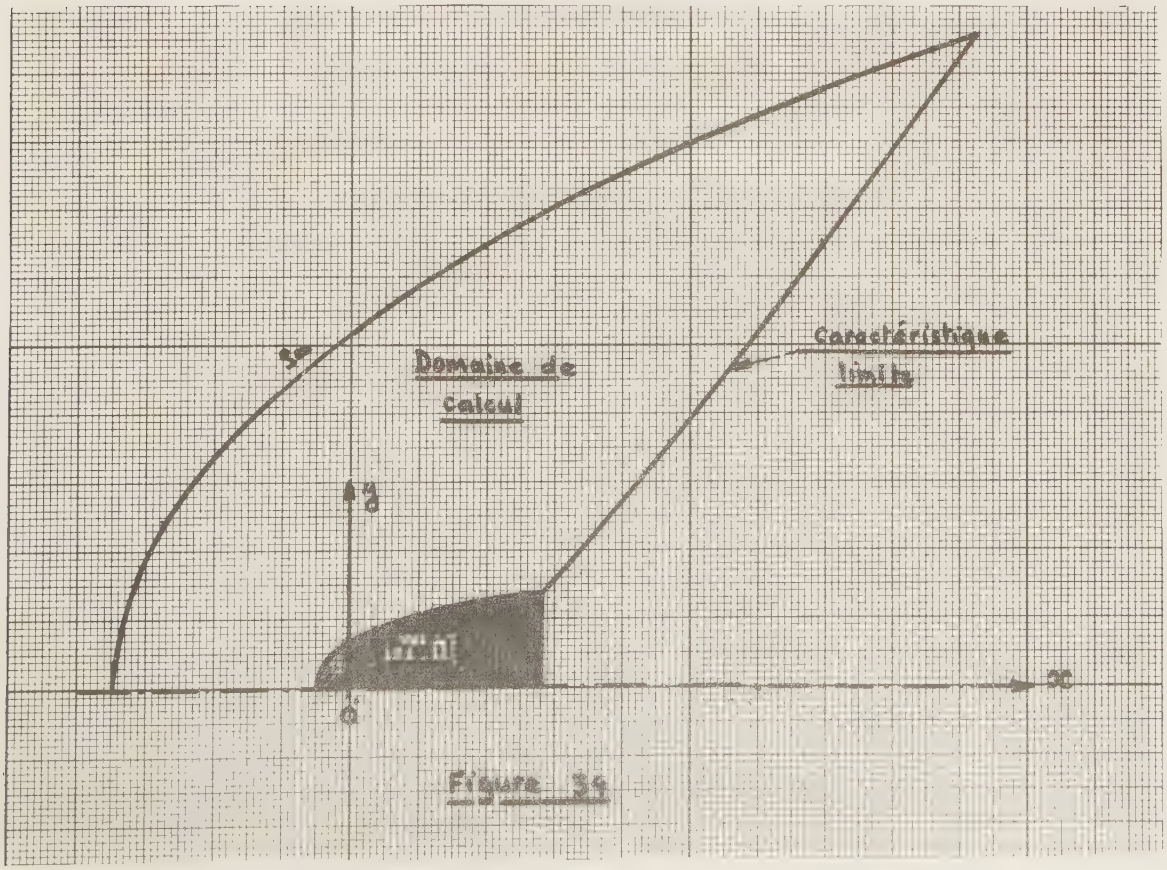


Figure 34

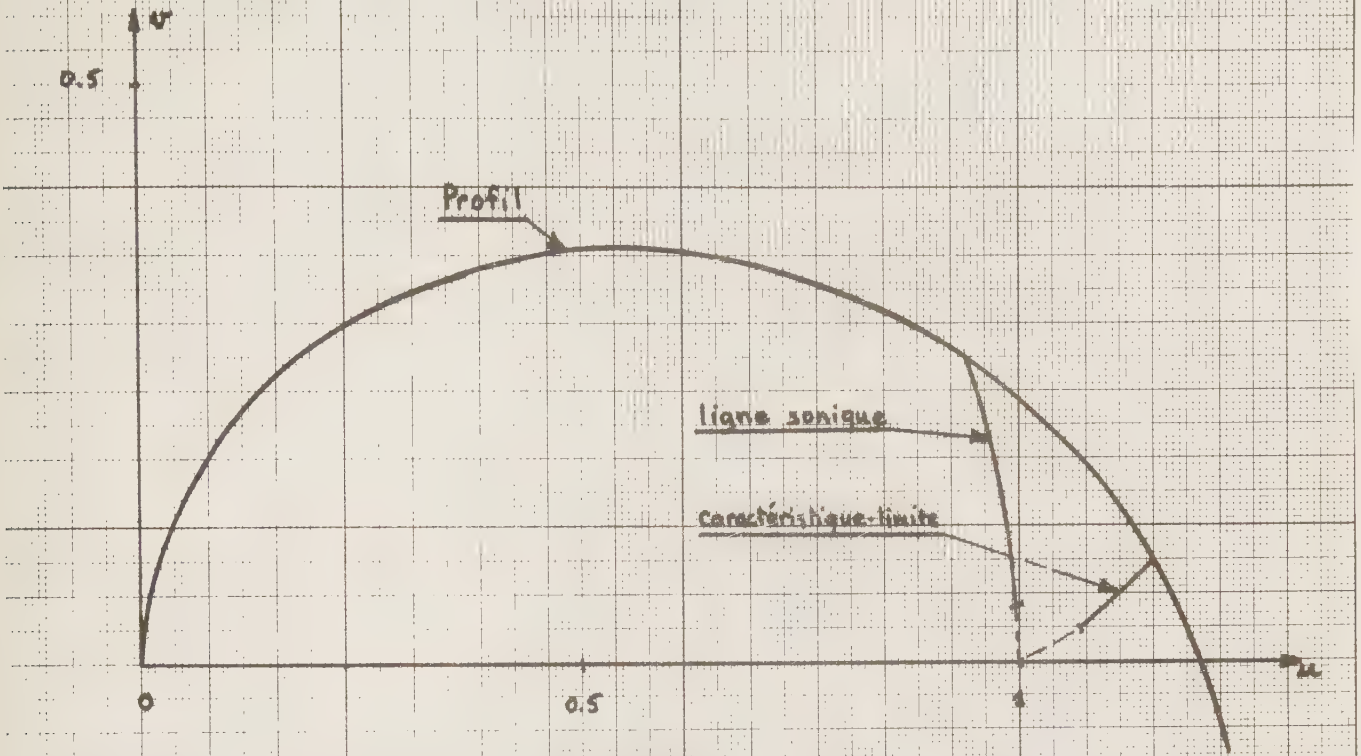


Figure 35

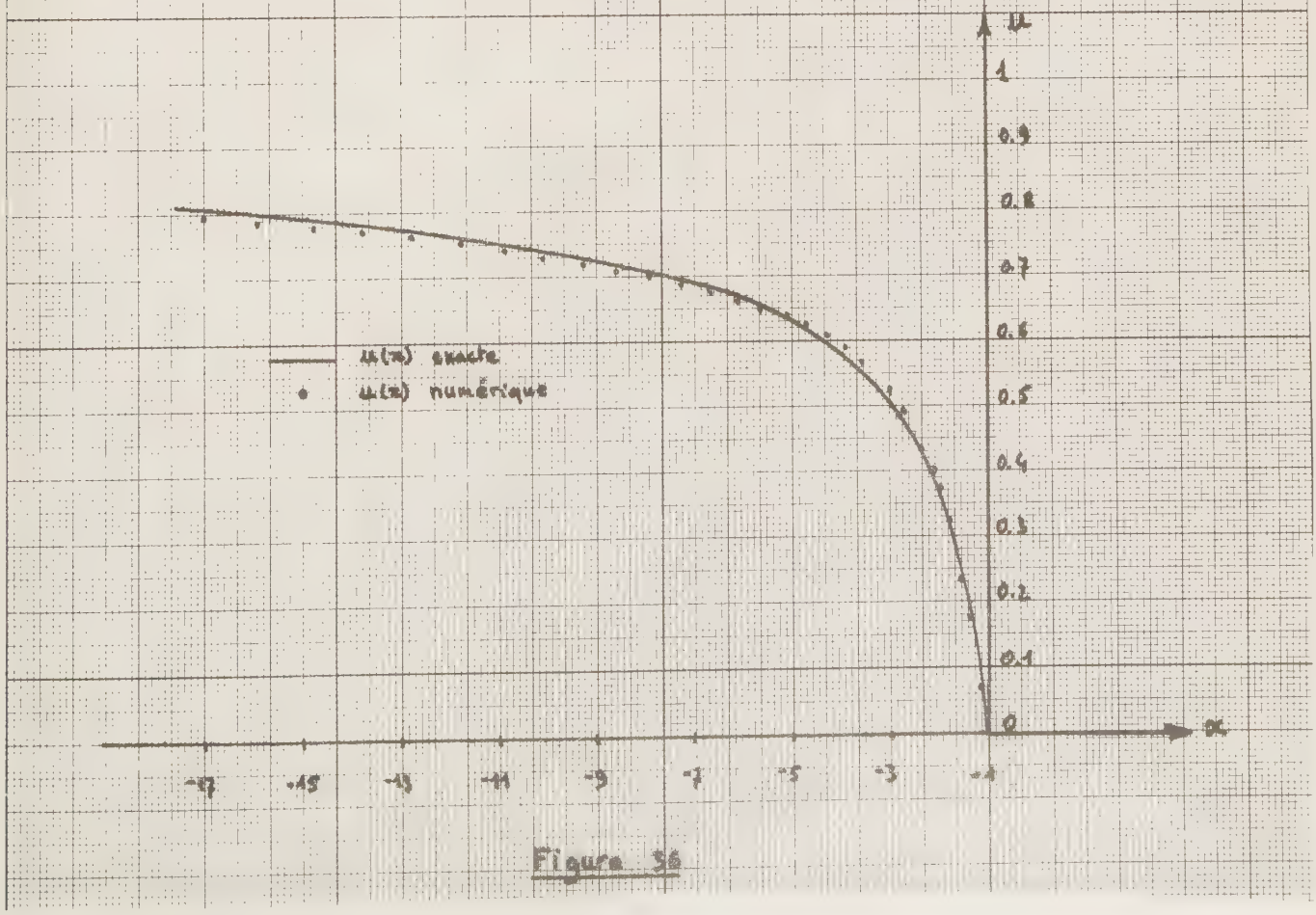


Figure 36

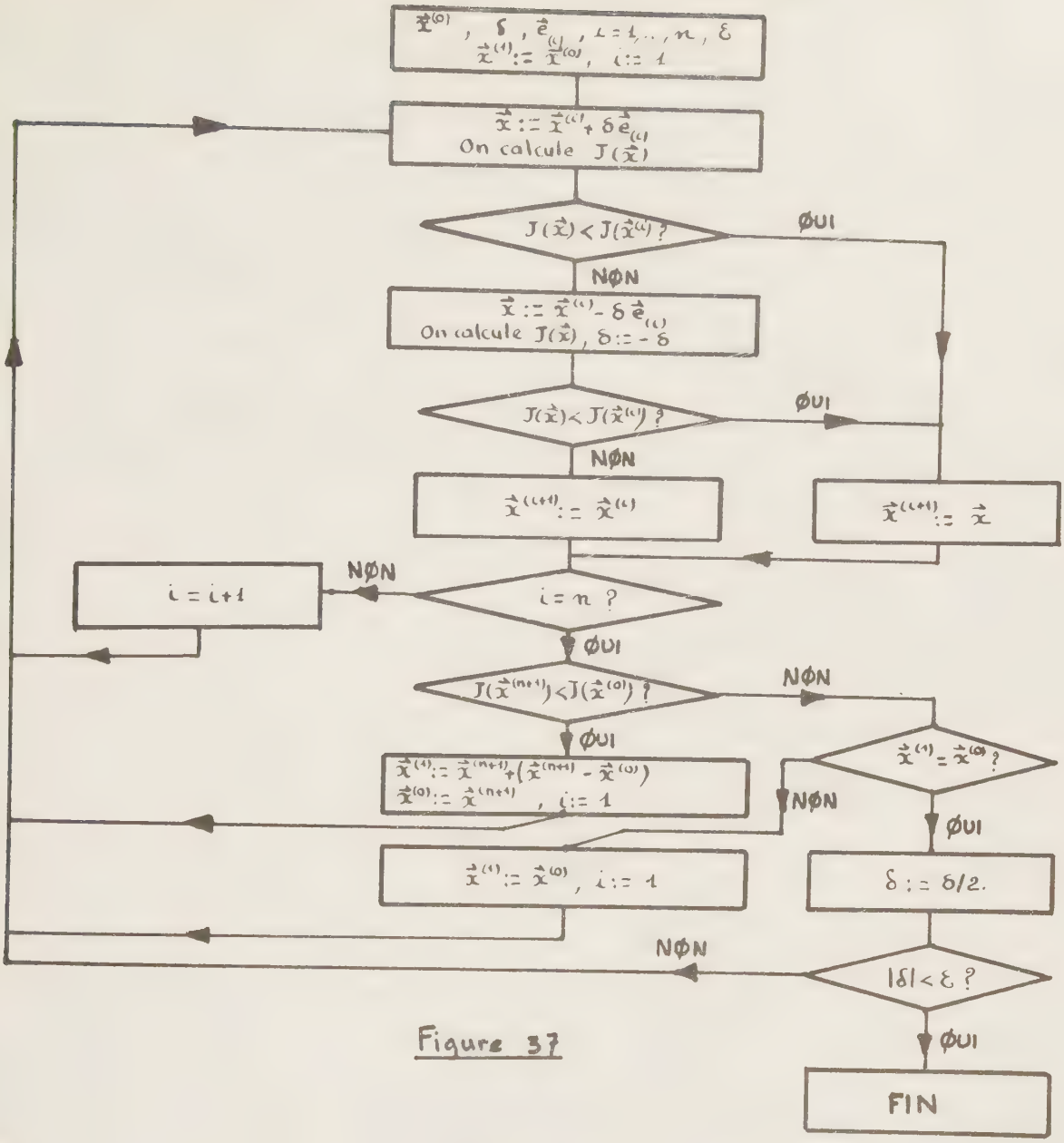


Figure 37

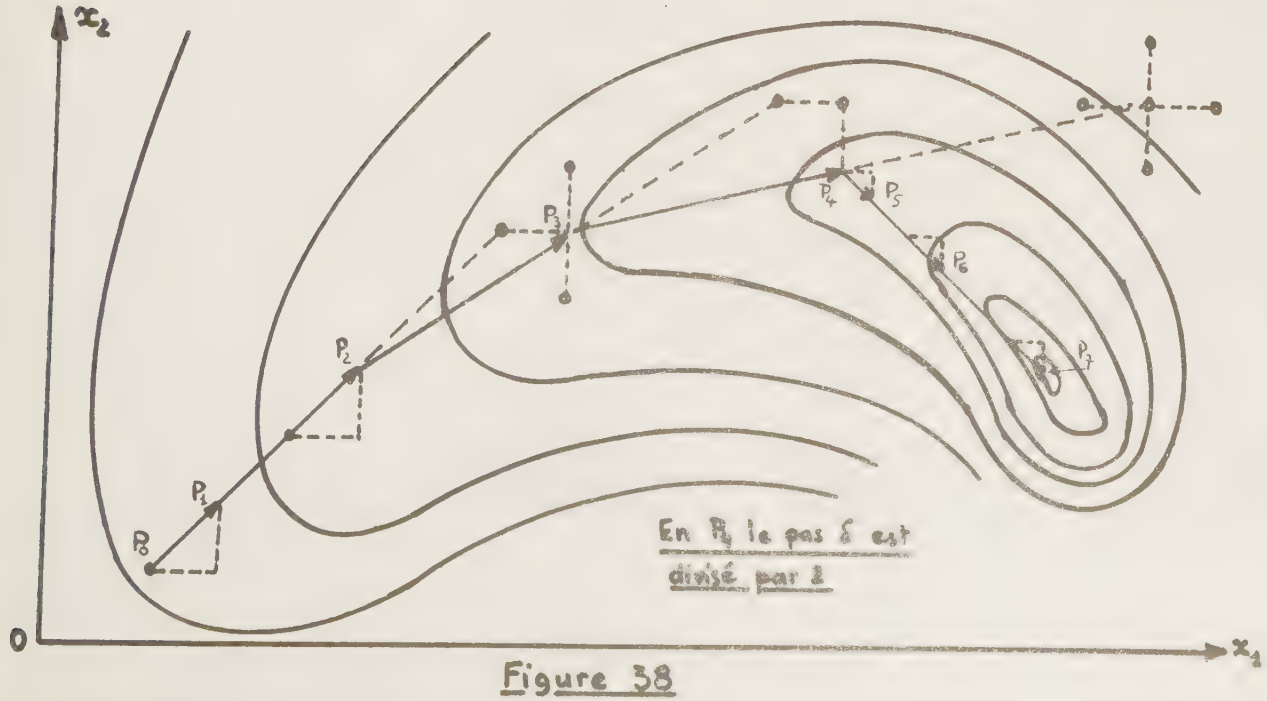


Figure 38

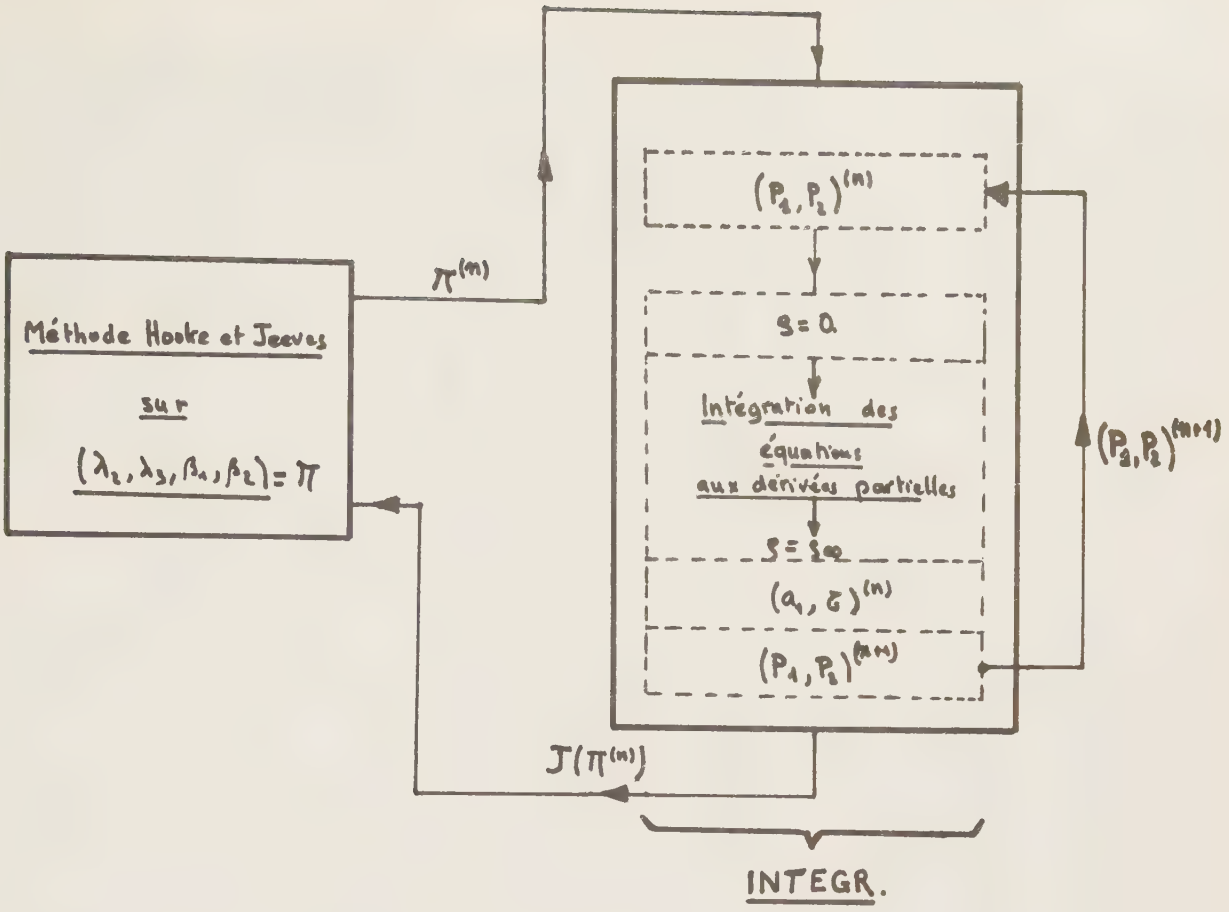


Figure 39

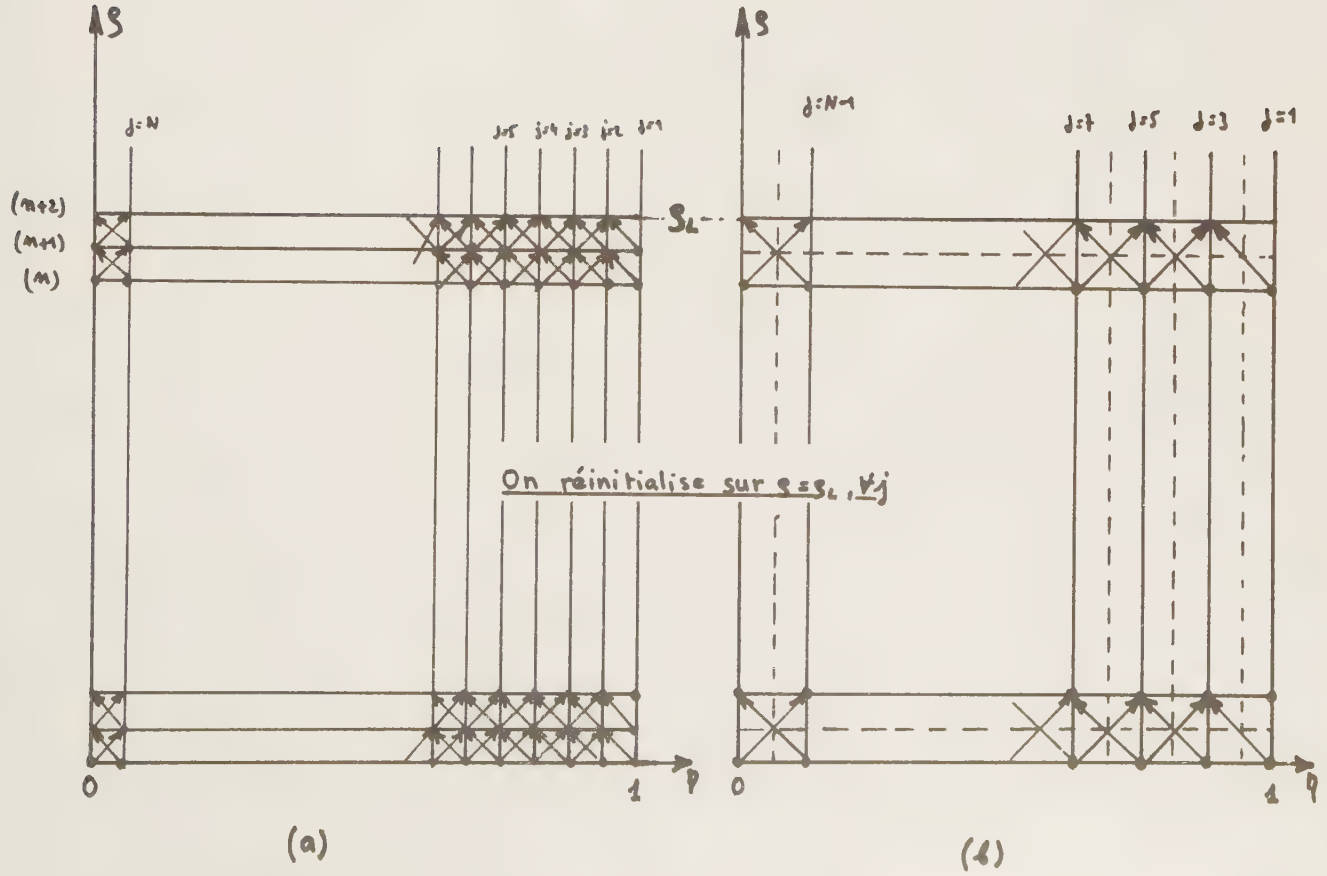


Figure 40

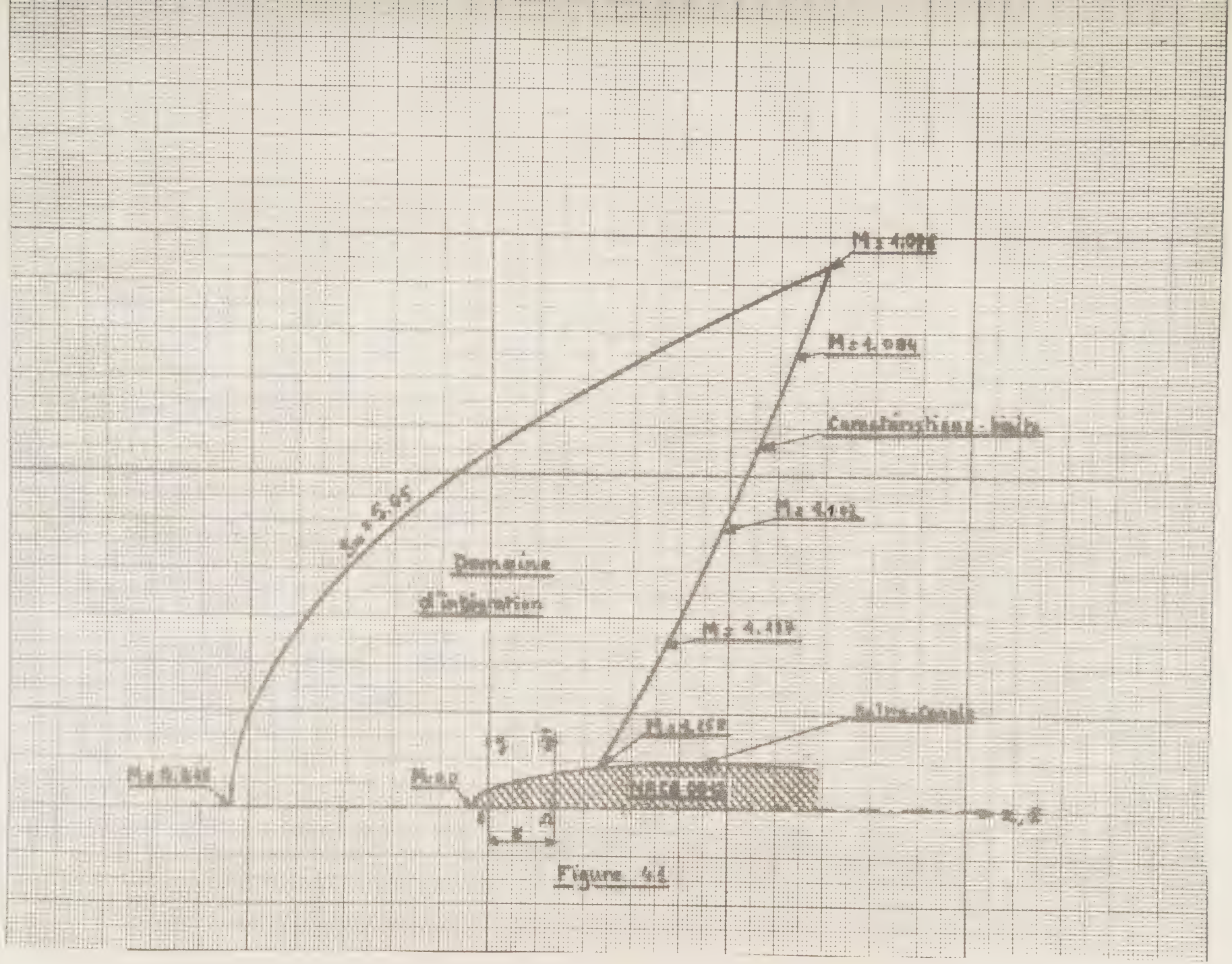


Figure 4.1

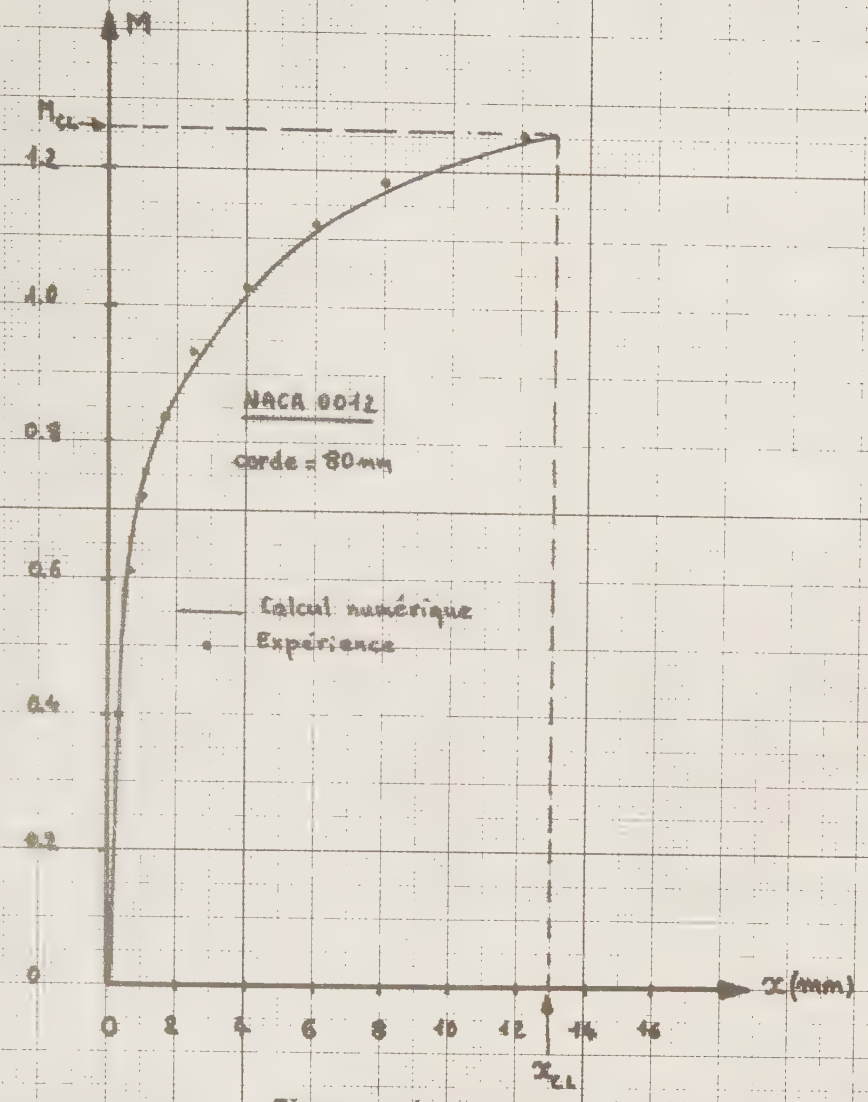


Figure 42

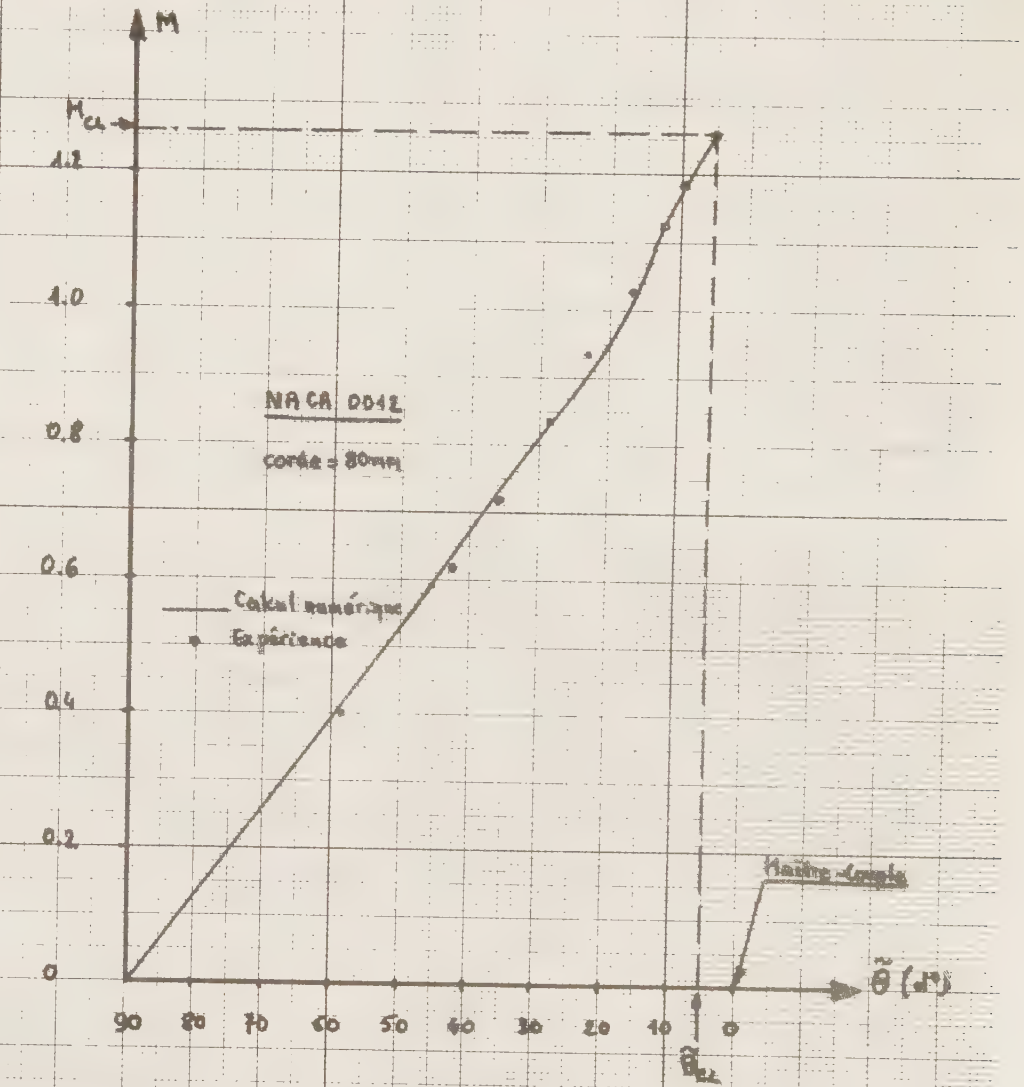


Figure 43

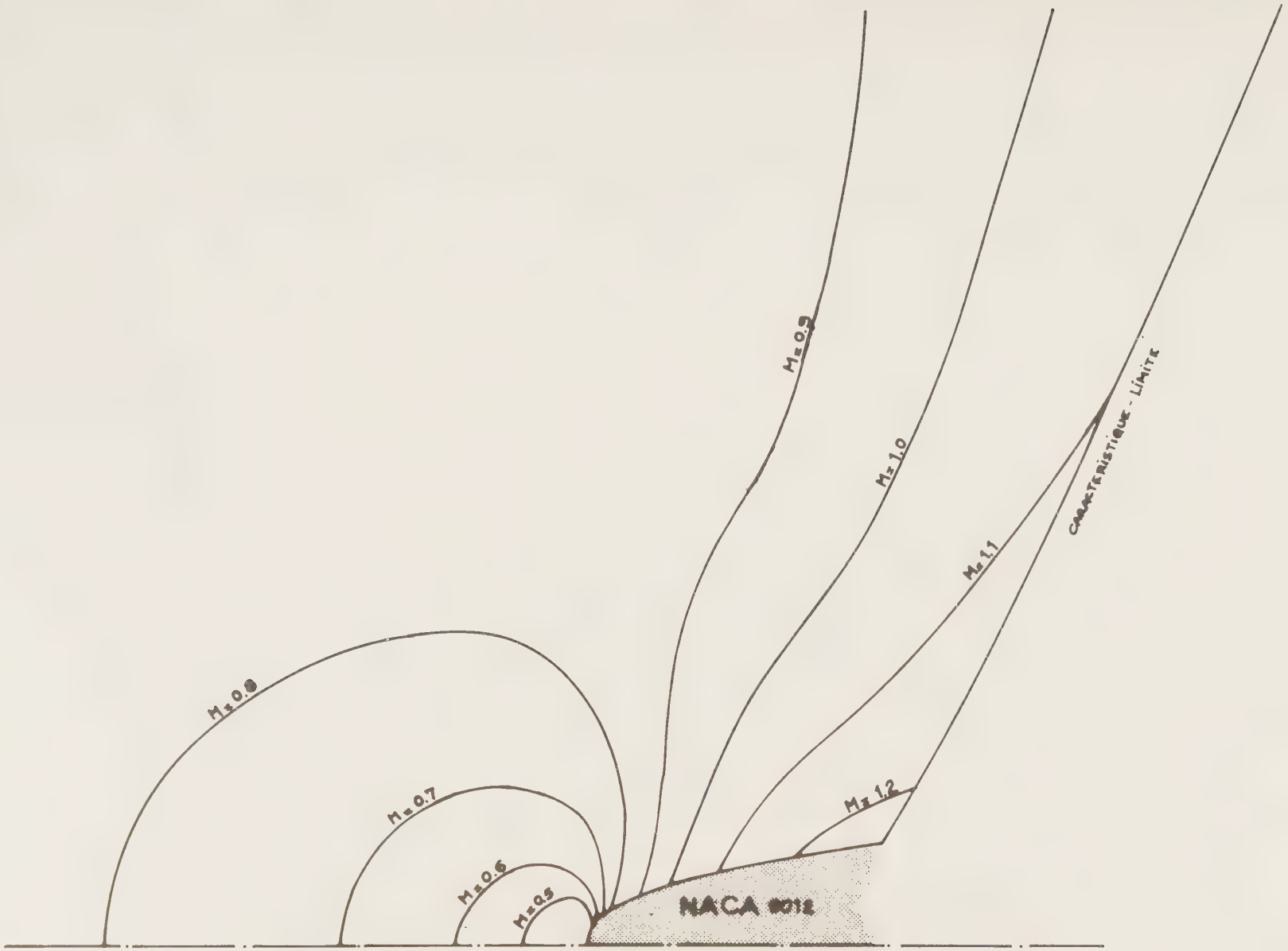


fig.44 Résultats numériques concernant les isomachs

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.G.A.R.D. "Transonic Aerodynamics" Conference Proceedings n° 35, sept. 1968.

[2] S.B. BERNDT, Y. SEDIN "A numerical method for transonic flow fields" I.C.A.S. 7, Roma, sept. 1970.

[3] M. BRATOS, M. BURNAT, W.J. PROSNAK "Application of the Lax finite difference scheme to transonic flow problems". Fluid dynamics transactions, volume 5, part II, 1971, pp. 58-65.

[4] F. et G. BROSSIER Rapport de recherche, université de Rennes, 1971.

[5] P. CARRIERE et C. CAPELIER "Application de la méthode des caractéristiques instationnaires au calcul numérique d'un écoulement permanent compressible", O.N.E.R.A. T.P. n° 630, 1968.

[6] P.I. CHUSHKIN Dokl Akad. Nauk SSSR 113, pp 517-519, 1957, ou encore "Numerical solution of certain problems of gas flow", dans "Basic development in Fluid dynamics" (M. HOLT), 1966, pp 616-631.

[7] J.D. COLE "Twenty years of transonic flows", ICAS Preprint n° 70-12, 1970.

[8] J.D. COLE "Perturbations methods in applied mathematics" Blaisdell Publishing Company, 1968.

[9] A. DYMENT et P. GRYSON "Etude expérimentale de profils d'ailes en écoulement plan subsonique et transsonique". Rapports IMFL n° 905 et 927 SR, janvier 1969.

[10] D. EUVRARD "Etude asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son". Première partie : écoulement plan, en amont des ondes de choc, J. Mécanique, vol. 6, n° 4, déc. 1967, pp. 548-592.

[11] D. EUVRARD — "Etude asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son". Deuxième partie : écoulement plan, en aval des ondes de choc, J. Mécanique, Vol. 7, n° 1, mars 1968, pp. 97-139.

[12] D. EUVRARD — "Etude asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son". Troisième partie : écoulement tridimensionnel, en amont des ondes de choc, J. Mécanique, Vol. 7, n° 3, sept. 1968, pp. 281-307.

[13] S.V. FAL'KOVITCH, I.A. CHERNOV — "Flow of sonic gas stream past a body of revolution" vol. 28, P.M.M., n° 2, 1964, pp. 343-347.

[14] F.I. FRANKL' — "Recherches théoriques sur l'aile d'envergure infinie se déplaçant à la vitesse du son". Dokl, Acad. Nauk S.S.S.R., t. 57, n° 7, pp. 661-664, 19 mars 1947, Trad. tech. O.N.E.R.A. n° 1100.

[15] M. FENAIN — La recherche aéronautique n° 33, pp. 11-28, 1953.

[16] M. FENAIN et C. REYBACH — Note technique ONERA n°4/1285 AN, janvier 1970
Note technique ONERA n°3/1285 AN, septembre 1969.

[17] P. GERMAIN — "Ecoulements transsoniques homogènes", Progress in Aeronautical Sciences, V, Pergamon Press, 1964.

[18] P. GERMAIN — "Actualité des problèmes transsoniques", Canadian Congress of applied mechanics, Proceedings, Volume 3, 1967.

[19] F. GROSJEAN — "Construction d'une solution exacte de l'écoulement au Mach d'approche unité, autour d'un profil symétrique, pour un fluide de Tomotika-Tamada, et utilisation de cette solution pour le contrôle d'une méthode numérique directe". Thèse de 3ème cycle - Université de Rennes - sept. 1972.

[20] K.G. GUDERLEY "Theory of transonic flow" Pergamon Press, 1962.

[21] R. HOOKE, T.A. JEEVES "Direct search", solution of numerical and statistical problems", J. Assoc. Comp. Math. 8, 2, April 1961.

[22] I. HOSAKOWA "A refinement of the linearized transonic flow theory" J. Phys. Soc. Japan, 15, 1960, pp. 149-157.

[23] J. HUBERT "Ecoulements transsoniques plan et de révolution à grande distance d'une paroi présentant une dénivellation", J. Mécanique, Vol. 7, n° 1, mars 1968.

[24] S. KAPLUN "Fluid mechanics and singular perturbations" Academic Press, 1967.

[25] R. LATTES, J.L. LIONS "Méthode de quasi-réversibilité et applications", Dunod, Paris, 1967.

[26] L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ "Fluid Mechanics", Traduction Pergamon Press, pp. 448-451, 1959.

[27] R. MAGNUS, H. YOSHIHARA "Inviscid transonic flow over airfoils" AIAA Paper 70-47, January 1970.

[28] A.J. MESSITER "Expansion procedures and similarity laws for transonic flow", California Institute of Technologie O.S.R. technical note 57-626, sept. 1957.

[29] G. MORETTI, R. GROSSMAN "Time-dependant computations of transonic flows" AIAA Paper 69-354, May 1969.

[30] E.A. MULLER, K. MATSCHAT "Ähnlichkeitslösungen der transsonischen gleichungen bei der Anström-Machzahl 1", Proc. of the 11th International Congress of applied Mechanics, München, 1964, pp. 1161-1168.

[31] E.M. MURMAN, J.D. COLE "Calculation of plane steady transonic flows" AIAA Paper 70-188, January 1970.

[32] G.Y. NIEUWLAND "Transonic potential flow around a family of quasi-elliptical aerofoil sections", N.L.R. (Amsterdam), Report T.R.T. 172, 1967.

[33] K. OSWATITSCH "New results on steady, two-dimensional transonic flow". AGARD Conference Proceedings, "Transonic Aerodynamics", september 1968, pp. 24-1 à 24-11.

[34] R.D. RICHTMYER, K.W. MORTON "Difference Methods for Initial-Value Problems" Interscience publishers, 1967.

[35] F. RIGAUT "Sur la détermination d'écoulements transsoniques par une méthode mixte analogique-numérique", thèse d'état, 1970.

[36] O.S. RYZHOV, E.D. TERENTEV P.M.M., Vol. 31, n° 6, pp. 1035-1049, 1967.

[37] S. TOMOTIKA, K. TAMADA Quaterly of Appl. Math. 7, pp. 381-397 (1950) et 9, pp. 129-147 (1951).

[38] G. TOURNEMINE, D. EUVRARD, J. HUBERT "Comportement asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son", communication au 12th International Congress of Applied Mechanics, Stanford, California, Août 1968.

[39] G. TOURNEMINE "Comportement asymptotique de l'écoulement sonique autour d'un corps de révolution de dimensions finies, en aval de l'onde de choc", J. Mécanique, Vol. 7, n° 3, sept. 1968, pp. 309-333.

[40] G. TOURNEMINE "Sur un schéma d'écoulement sonique tridimensionnel en aval de l'onde de choc en fluide parfait", C.R.A.S., t. 267, série A, pp. 711-714, 4 novembre 1968.

[41] G. TOURNEMINE, D. EUVRARD, J. HUBERT "Quelques résultats récents concernant les développements asymptotiques dans les écoulements transsoniques", 9è Symposium de Dynamique des Fluides, Kazimierz, Pologne, 1969, Fluid Dynamics Transactions, Vol. 5, part. I, pp 61-73.

[42] G. TOURNEMINE "Etude asymptotique d'écoulements de fluide parfait autour de corps tridimensionnels faiblement portants en régime sonique", C.R.A.S. t. 270, série A, pp. 162-165, 12 janvier 1970

[43] G. TOURNEMINE "Etude d'écoulements tridimensionnels faiblement portants à $M_\infty = 1$",Euromech 25, Paris, juillet 1971.

[44] G. TOURNEMINE, D. EUVRARD, J. HUBERT "A numerical method for computing flows past wing airfoils at Mach number one", 10e Symposium de Dynamique des Fluides. Rynia-Pologne, sept. 1971, Fluid Dynamic Transactions, Vol. 6, part II, pp. 155-159.

[45] G. TOURNEMINE, D. EUVRARD, J. HUBERT, F. RIGAUT "Calcul numérique d'un écoulement sonique autour d'un profil d'aile d'avion par une méthode inverse", C.R.A.S., t. 273, série A, pp. 739-742, 18 oct. 1971.

[46] G. TOURNEMINE "Ecoulements stationnaires autour d'obstacles tridimensionnels en régime sonique", J. Mécanique, Vol. 10, n° 4, décem. 1971, pp. 503-543.

[47] G. TOURNEMINE, D. EUVRARD "Calcul numérique de l'écoulement sonique autour d'un profil d'aile donné, par une méthode directe dans le plan physique", C.R.A.S. t. 274, série A, pp. 1071-1074, 27 mars 1972.

[48] G. TOURNEMINE, D. EUVRARD "A direct method for computing the steady flow at Mach number one past a given wing airfoil", 3è Conférence Internationale sur les méthodes numériques en mécanique des Fluides, Paris, juillet 1972. (à paraître chez Springer-Verlag).

[49] G. TOURNEMINE, D. EUVRARD "Elaboration d'une méthode numérique pour la résolution de certains problèmes elliptiques-hyperboliques non-linéaires, avec application au calcul de l'écoulement sonique autour d'un profil d'aile donné", 13è Congrès International de Mécanique théorique et appliquée, Moscou, août 1972.

[50] G. TOURNEMINE, D. EUVRARD "Nouveaux résultats concernant le calcul numérique de l'écoulement sonique autour d'un profil d'aile donné", C.R.A.S., t. 275, série A, pp. 303-305, 24 juillet 1972.

[51] G. TOURNEMINE, D. EUVRARD "Programme de calcul de profils d'ailes à Mach 1", 9è Colloque d'aérodynamique appliquée de l'A.A.A.F., Paris, nov. 1972.

[52] G. TOURNEMINE, D. EUVRARD "Méthode directe de calcul de l'écoulement sonique autour d'un profil d'aile donné. Cas d'un écoulement symétrique". J. Mécanique, (à paraître).

[53] M. VAN DYKE "Perturbation methods in fluid mechanics", Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 8, Academic Press, 1964.

[54] N. VAN-QUY "Vérification expérimentale de la solution homogène pour un écoulement plan à $M_\infty = 1$", thèse de 3ème cycle, I.M.F.L., Lille, 1962.

[55] J.L. WALSH, J.H. AHLBERG and E.N. NILSON "Best approximation properties of the spline fit". Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 11, number 2, March 1962.

[56] J. ZIEREP "Shallnahe Strömungen (Beitrage zur parabolischen Methode)", Z.A.M.M., Band 43 (1963), pp. 182-187.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION p. 1

PREMIERE PARTIE : ECOULEMENTS STATIONNAIRES AUTOUR D'OBSTACLES TRIDIMENSIONNELS, EN REGIME SONIQUE

§ 1 - Introduction p. 7

§ 2 - Résultats essentiels concernant les écoulements de révolution p. 9

§ 3 - Etude de l'écoulement autour d'un corps tridimensionnel quelconque p. 11

3.1. Etude de la surface de choc dans la région extérieure p. 13

3.2. Influence du premier terme tridimensionnel du potentiel sur le développement intérieur p. 15

3.3. Conservation de la quantité de mouvement transversale p. 16

3.4. Calcul du tourbillon sur la face aval du choc dans la zone extérieure p. 18

3.5. Abandon d'une des hypothèses p. 21

3.6. Comportement du tourbillon à l'infini aval, dans la région extérieure p. 22

3.7. Mise en évidence d'une contradiction dans le schéma tridimensionnel quelconque p. 25

§ 4 - Ecoulements de pseudo-révolution p. 27

4.1. Résultats généraux p. 28

4.2. Détermination des trois premiers termes du champ intérieur des vitesses p. 29

4.3. Comportement du tourbillon à l'infini aval, dans la zone extérieure p. 31

4.4. Passage aux écoulements incompressibles p. 33

§ 5 - Ecoulements faiblement portants p. 34

5.1. Présentation du problème p. 34

5.2. Ecoulement linéarisé au voisinage d'un écoulement de pseudo-révolution p. 35

5.3. Existence, à l'infini aval, d'une perturbation singulière due à la portance p. 37

5.4. Information sur le développement distal p. 41

5.5. Concepts de passage à la limite p. 41

5.6. Application du principe de raccordement p. 45
5.7. Détermination de $\vec{q}_p$ au premier ordre p. 48
5.8. Expression de la portance p. 50

§ 6 - Tableaux et figures concernant cette première partie p. 52

DEUXIEME PARTIE - ELABORATION D'UNE METHODE NUMERIQUE POUR LA RESOLUTION DE CERTAINS PROBLEMES MIXTES NON-LINEAIRES, AVEC APPLICATION AU CALCUL DE L'ECOULEMENT SONIQUE AUTOUR D'UN PROFIL D'AILE DONNE.

§ 1 - Introduction p. 63

§ 2 - Idées générales de la méthode p. 65

§ 3 - Le problème à résoudre p. 67

3.1. Schéma physique p. 67
3.2. Actualité du problème p. 69
3.3. Méthode de résolution p. 72

§ 4 - Rappels sur les développements asymptotiques à l'infini p. 73

4.1. Cas général d'un profil asymétrique p. 73
4.1.1. Développement asymptotique du potentiel des vitesses p. 73
4.1.2. Développement asymptotique des caractéristiques-limites p. 78
4.2. Cas particulier du profil symétrique p. 80

§ 5 - Formulation mathématique du problème p. 80

5.1. Pourquoi il faut se donner la forme de la caractéristique-limite p. 81
5.2. Pose du problème dans le plan physique p. 81
5.3. Pose définitive du problème p. 85
5.3.1. Introduction de nouvelles variables p. 85
5.3.2. Pente des caractéristiques dans le plan (ς,σ) p. 89
5.3.3. Ecriture des équations du mouvement en variables ς et η : problème (P_T) p. 91

§ 6 - Recherche de familles admissibles p. 97

6.1. Caractéristiques essentielles du NACA 0012 p. 99
6.2. Comportement asymptotique de la pression, sur le profil, au voisinage du bord d'attaque p. 100

6.3. Famille admissible de pressions p. 102

6.3.1. Elaboration définitive d'une famille admissible de pressions p. 105

6.4. Famille admissible de caractéristiques-limites p. 110

6.4.1. Relations entre les paramètres P_1, P_2, a_1 et τ p. 112

§ 7 - Résolution d'un problème de Cauchy elliptique-hyperbolique, non-linéaire, avec conditions aux limites p. 114

7.1. Un problème de Cauchy, elliptique, est mal posé p. 114

7.1.1. Possibilité de résoudre numériquement un tel problème p. 117

7.1.2. Etude numérique du problème de Cauchy pur, puis du problème de Cauchy avec conditions aux limites, pour l'équation de Laplace p. 123

7.2. Utilisation du schéma de Lax pour des équations mixtes, non-linéaires p. 125

7.2.1. Résolution d'un problème inverse p. 125

7.2.1.1. Choix des coordonnées p. 127

7.2.1.2. Introduction du schéma (S) p. 128

7.2.1.3. Conditions sur la caractéristique-limite p. 132

7.2.1.4. Procédure d'intégration p. 135

7.2.1.5. Résultats numériques p. 136

7.3. Problème de Cauchy hyperbolique, non-linéaire, avec frontières libres, puis avec conditions aux limites imposées p. 136

§ 8 - Etude de la stabilité et de la dépénalisation pour le problème direct p. 137

8.1. Etude de la stabilité et de la pseudo-stabilité du schéma (S) p. 139

8.1.1. Etude de la stabilité en supersonique p. 142

8.1.2. Etude de la pseudo-stabilité en subsonique p. 143

8.2. Etude de la dépénalisation automatique p. 147

8.2.1. Choix du paramètre α intervenant dans le schéma (S) p. 148

8.2.1.1. Etude du cas hyperbolique p. 149

8.2.1.2. Etude du cas elliptique p. 150

8.3. Choix de la fonction G p. 152

8.4. Exemple de dépénalisation automatique p. 154

§ 9 - Procédure d'intégration pour le problème (P_T) p. 155

9.1. Obtention des résultats au 2ème ordre p. 157

9.2. Cas où le profil n'est connu que par points p. 161

§ 10 - Résolution numérique du problème de tir p. 163

10.1. Position du problème p. 163

10.2. Détermination des coefficients a_1 et τ p. 164

10.3. Définition d'une distance et d'un critère de sélection p. 166

10.4. La méthode de minimisation p. 168

§ 11 - Application de la méthode de tir au profil NACA 0012 p. 172

§ 12 - Annexes et figures de la deuxième partie p. 179

BIBLIOGRAPHIE

VU :

Le Président de la Thèse

A. MIGNOT

VU :

Le Directeur de Thèse

D. EUVRARD

VU ET APPROUVE

RENNES, le

Le Directeur de l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique

J. HOUDEBINE

VU ET PERMIS D'IMPRIMER

RENNES, le

Le Président de l'Université de Rennes

C. CHAMPAUD